Solution GEOM01G01

Partie A

1.

Soient (x_A, y_A, z_A) *et* (x_B, y_B, z_B) *les coordonnées des points A et B*

$$A\left|\begin{array}{l} x_A = -1 \\ y_A = 0 \\ z_A = 2 \end{array}\right. \quad et \quad B\left|\begin{array}{l} x_B = 3 \\ y_B = 2 \\ z_B = -4 \end{array}\right.$$

I milieu du segment $[AB]$ *et* (x_I, y_I, z_i) *les coordonnées du point I*

$$I\left|\begin{array}{l} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 1 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = 1 \\ z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = -1 \end{array}\right.$$

K milieu du segment $[CD]$ *et* (x_K, y_K, z_K) *les coordonnées du point K*

$$K\left|\begin{array}{l} x_K = 3 \\ y_K = -3 \\ z_K = 3 \end{array}\right.$$

De même

$$\vec{BC} = \left|\begin{array}{l} x_C - x_B = -2 \\ y_C - y_B = -6 \\ z_C - z_B = 6 \end{array}\right. \quad et \quad \vec{BJ} = \left|\begin{array}{l} x_J - x_B = -1/2 \\ y_J - y_B = -3/2 \\ z_J - z_B = 3/2 \end{array}\right.$$

$\vec{OJ} = \vec{OB} + \vec{BJ}$ *avec* $\vec{OB} = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{vmatrix}$

et les coordonnées de J sont $J\begin{vmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ -5/2 \end{vmatrix}$

2. *a) Le vecteur* $\vec{IJ}$ *admet pour coordonnées* $\vec{IJ} = \begin{vmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ -3/2 \end{vmatrix}$

Le vecteur $\vec{IK}$ *admet pour coordonnées* $\vec{IK} = \begin{vmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{vmatrix}$

Puisque $\vec{IK} \neq k\vec{IJ}$ *alors* $\vec{IK}$ *et* $\vec{IJ}$ *ne sont pas colinéaires*
et les points I, J et K ne sont pas alignés.

b) Soit P le plan d'équation cartésienne $8x + 9y + 5z - 12 = 0$
$I = (1\ ;\ 1\ ;\ -1) \in P$ *puisque* $8(1) + 9(1) + 5(-1) - 12 = 0$
$J = (\frac{5}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ -\frac{5}{2}) \in P$ *puisque* $8(\frac{5}{2}) + 9(\frac{1}{2}) + 5(-\frac{5}{2}) - 12 = 0$
$K = (3\ ;-3\ ;\ 3) \in P$ *puisque* $8(3) + 9(-3) + 5(3) - 12 = 0$
Puisqu'il n'existe qu'un seul plan contenant les 3 points non alignés I, J et K
une équation cartésienne du plan (IJK) est $8x + 9y + 5z - 12 = 0$

c) Un point M $(x;y;z)$ *appartient à la droite* (AD) *si et seulement s'il existe* $t \in R$ *tel que* $\vec{AM} = t\,\vec{AD}$

puisque $\vec{AM} = \begin{vmatrix} x+1 \\ y \\ z-2 \end{vmatrix}$ *et* $\vec{AD} = \begin{vmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{vmatrix}$

alors

$$\begin{cases} x+1 = 6t \\ y = -2t \qquad (t \in R) \\ z-2 = 2t \end{cases}$$

Une représentation paramétrique dê la droite (AD) *est*

$$\begin{cases} x = -1+6t \\ y = -2t \qquad (t \in R) \\ z = 2+2t \end{cases}$$

Pour que M appartienne au plan P d'équation $8x+9y+5z-12=0$
il faut que $8(-1+6t)+9(-2t)+5(2+2t)-12=0$

soit $t = \dfrac{1}{4}$

la droite (AD) *et le plan* (IJK) *se coupenten un seul point L correspondant à la valeur* $t = \dfrac{1}{4}$.

$$\text{Soit } D = \begin{cases} -1+6(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \\ -2(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2} \\ 2+2(\frac{1}{4}) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

La droite (AD) et le plan (IJK) sont sécants

au point L dont les coordonnées sont $L = \begin{vmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 5/2 \end{vmatrix}$

$d)\ \vec{AL} = \begin{vmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 5/2 \end{vmatrix}$ *et* $\vec{AD} = \begin{vmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{vmatrix}$ *donc* $\vec{AL} = \frac{1}{4}\vec{AD}$

Solution GEOM01G02

1. *Soit P le plan d'équation* $2x + 3y + 4z + 1 = 0$
et d la distance du point O au plan P
d est donnée par la formule

$$d = \frac{|ax_O + by_O + cz_O + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad avec \ x_O = y_0 = z_0 = 0$$

$$soit \ d = \frac{1}{\sqrt{29}}$$

Soit $\vec{u}$ *un vecteur normal au plan P alors* $\vec{u} = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix}$

puisque $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{n}$ *le vecteur* $\vec{n} = \begin{vmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 2 \end{vmatrix}$ *est un vecteur normal au plan P*

Les réponses correctes sont les réponses b) et c)

2. *Soit P le plan d'équation* $2x + y - z = 0$

et soit $\vec{n}$ *un vecteur normal à P alors* $\vec{n} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$

Nous avons $\vec{u} = \begin{vmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{vmatrix}$

Effectuons le produit scalaire $\vec{n} \cdot \vec{u}$

$\vec{n} \cdot \vec{u} = (1)(2) + (-4)(1) + (-2)(-1) = 0$

donc $\vec{n}$ *et* $\vec{u}$ *sont orthogonaux et la drote D*
est parallèle au plan P.

La droite D passe par le point $A \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ *et admet pour vecteur*

directeur le vecteur $\vec{u} = \begin{vmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{vmatrix}$

Un système d'équation paramétrique est alors

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 4t \qquad (t \in R) \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Les réponses exactes sont les réponses a) et d)

4. *Soit ABCD un tétraèdre quelconque et P le plan passant par A et orthogonal à la droite* (BC)

P *est l'ensemble des points M tels que* $\vec{AM} \cdot \vec{BC} = 0$

et donc $(\vec{AB} + \vec{BM}) \cdot \vec{BC} = 0$

ou $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BM} \cdot \vec{BC} = 0$

et $\vec{BM} \cdot \vec{BC} = -\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{BA} \cdot \vec{BC}$

De plus si H est le pied de la hauteur issu de A du triangle ABC

alors $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$ *donc le point H appartient à P.*

Les réponses exactes sont les réponses b) et c).

3. $M(x\ ;y\ ;z) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x \quad -z=1 \end{cases}$

$x+y+z-3=0$ *est l'équation d'un plan* P_1

de vecteur normal $\vec{n_1} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$

$2x-z-1=0$ *est l'équation d'un plan* P_2

de vecteur normal $\vec{n_2} = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$

$\vec{n_2}$ *n'est pas colinéaire à* $\vec{n_1}$ *donc les plans* P_1 *et* P_2
sont sécants, leur intersection est une droite Δ .
$A \in P_1$ *puisque* $1+1+1-3=0$
$A \in P_2$ *puisque* $2-1-1=0$
donc l'ensemble E *est une droite passant par* A.
Cherchons un autre point B *de la droite* Δ, *en posant par exemple* $z=0$

soit $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x=1 \end{cases}$ *système qui admet pour solution* $x=\dfrac{1}{2}$ $y=\dfrac{5}{2}$

le point $B \begin{vmatrix} 1/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{vmatrix}$ *est aussi sur la droite* Δ.

le vecteur $\vec{AB} = \begin{vmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ -1 \end{vmatrix}$ *est un vecteur directeur de* E.

le vecteur $\vec{u} = -2\,\vec{AB}$ *est un vecteur directeur de* E.
Les réponses correctes sont les réponses b) *et* d).

Solution GEOM01G03

1. $a)$

$$A\begin{vmatrix}2\\0\\-1\end{vmatrix}\quad B\begin{vmatrix}1\\11\\-2\end{vmatrix}\quad C\begin{vmatrix}-2\\2\\1\end{vmatrix}\quad D\begin{vmatrix}-3,5\\5\\-8\end{vmatrix}\quad E\begin{vmatrix}0,5\\6\\-1\end{vmatrix}$$

$$\vec{CA}=\begin{vmatrix}4\\-2\\-2\end{vmatrix}\qquad \vec{CB}=\begin{vmatrix}3\\9\\-3\end{vmatrix}$$

$$\vec{CA}\,.\,\vec{CB}=(4)(3)+(-2)(9)+(-2)(-3)=12-18+6=0$$

Les vecteurs $\vec{CA}$ *et* $\vec{CB}$ *sont orthogonaux.*

$b)$

$$\vec{w}=\begin{vmatrix}4\\1\\7\end{vmatrix}\qquad \vec{CA}=\begin{vmatrix}4\\-2\\-2\end{vmatrix}\qquad \vec{CB}=\begin{vmatrix}3\\9\\-3\end{vmatrix}$$

$$\vec{w}\,.\,\vec{CA}=(4)(4)+(1)(-2)+(7)(-2)=16-2-14=0$$

$$\vec{w}\,.\,\vec{CB}=(4)(3)+(1)(9)+(7)(-3)=12+9-21=0$$

les vecteurs $\vec{CA}$ *et* $\vec{CB}$ *ne sont pas colinéaires, donc*
les trois points A, B *et* C *forment un plan noté* (P)
puisque $\vec{w}$ *est orthogonal à* $\vec{CA}$ *et à* $\vec{CB}$
$\vec{w}$ *est ortogonal au plan* (P)

2. $a)$

$\vec{CA}$ *et* $\vec{CB}$ *sont orthogonaux, le triangle* ABC *est rectangle en* C.

L'aire du triangle rectangle ABC *est égale à* $\frac{1}{2}\ CA\ CB$

$$CA^2=(4)^2+(-2)^2+(-2)^2=24 \qquad et \quad CA=2\sqrt{6}$$

$$CB^2=(3)^2+(9)^2+(-3)^2=99 \qquad et \quad CB=3\sqrt{11}$$

$$aire\ du\ triangle\ ABC=\frac{1}{2}\ x\ 2\sqrt{6}\ x\ 3\sqrt{11}=3\sqrt{66}$$

$b)$ *le vecteur* $\vec{w}$ *est normal au plan* (ABC)

L'équation du plan (ABC) *est de la forme*

$$4x + y + 7z + d = 0$$

Ecrivons que le point A *appartient au plan* (ABC)

$$(4)(2) + 0 + (7)(-1) + d = 0 \quad soit \quad d = -1$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) *est*

$$4x + y + 7z - 1 = 0$$

$$D\begin{vmatrix} -3,5 \\ 5 \\ -8 \end{vmatrix} \qquad E\begin{vmatrix} 0,5 \\ 6 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$(4)(-3,5) + (1)(5) + (7)(-8) - 1 = -66 \neq 0$$

donc le point D *n'appartient pas au plan* (ABC)

$$(4)(0,5) + (1)(6) + (7)(-1) - 1 = 0$$

donc le point E *appartient au plan* (ABC)

3. *a*)

$$\vec{EA} = \begin{vmatrix} 1,5 \\ -6 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{EB} = \begin{vmatrix} 0,5 \\ 5 \\ -1 \end{vmatrix} \qquad \vec{EC} = \begin{vmatrix} -2,5 \\ -4 \\ 2 \end{vmatrix}$$

puisque l'on a $\vec{EA} + 2\vec{EB} + \vec{EC} = \vec{0}$

E est le barycentre des points pondérés

$E = bar\{(A,1),(B,2),(C,1)\}$

b) *I milieu du segment* $[AC]$

la relation de définition du barycentre s'écrit aussi

$(\vec{EI} + \vec{IA}) + 2\vec{EB} + (\vec{EI} + \vec{IC}) = \vec{0}$

Si I est le milieu du segment $[AC]$ *alors* $\vec{IA} + \vec{IC} = \vec{0}$

donc $2\vec{EB} + 2\vec{EI} = \vec{0}$

soit $\vec{EB} + \vec{EI} = \vec{0}$

et $\vec{EB} + (\vec{EB} + \vec{BI}) = \vec{0}$

$2\vec{EB} + \vec{BI} = \vec{0}$

ou $\vec{BI} = 2\vec{BI}$

et donc E est bien le milieu de $[BI]$.

Solution GEOM01G04

$A\begin{vmatrix}1\\2\\2\end{vmatrix} \qquad B\begin{vmatrix}3\\2\\1\end{vmatrix} \qquad C\begin{vmatrix}1\\3\\3\end{vmatrix}$

alors

$\vec{AB}=\begin{vmatrix}2\\0\\-1\end{vmatrix} \qquad \vec{AB}=\begin{vmatrix}0\\1\\1\end{vmatrix} \qquad \vec{AB}\neq k\,\vec{AC}$

Les vecteurs $\vec{AB}$ *et* $\vec{AC}$ *ne sont pas colinéaires; ils déterminent un plan.*

Soit $\vec{n}\begin{vmatrix}a\\b\\c\end{vmatrix}$ *un vecteur normal au plan ABC*

alors $\vec{n}$ *est orthogonal à deux vecteurs quelconques situés dans le plan ABC, par exemple* $\vec{n}$ *est orthogonal à* $\vec{AB}$ *et à* $\vec{AC}$

alors

$\vec{n}\,.\,\vec{AB}=0$ *et* $\vec{n}\,.\,\vec{AC}=0$

soit $\begin{cases}2a-c=0\\ b+c=0\end{cases}$

fixons nous arbitrairement $c=1$, *alors* $a=1/2$ *et* $b=-1$

$\vec{n}\begin{vmatrix}a\\b\\c\end{vmatrix}$

et le vecteur $\vec{n_1}=2\vec{n}$ *est un vecteur normal au plan ABC*

$\vec{n_1}\begin{vmatrix}1\\-2\\2\end{vmatrix}$ (*les composantes de* $\vec{n_1}$ *sont des entiers*)

L'équation du plan ABC est de la forme

$$x - 2y + 2z + d = 0$$

Ecrivons que A appartient au plan ABC

$$1(1) - 2(2) + 2(2) + d = 0$$

soit $d = -1$

Une équation cartésienne du plan ABC est

$$x - 2y + 2z - 1 = 0$$

2. *On considère les plans d'équations respectives*

(P_1) : $x - 2y + 2z - 1 = 0$

(P_2) : $x - 3y + 2z + 2 = 0$

a)

si $\vec{n}_1$ *est un vecteur normal au plan* (P_1) *alors* $\vec{n}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{vmatrix}$

et si $\vec{n}_2$ *est un vecteur normal au plan* (P_2) *alors* $\vec{n}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{vmatrix}$

Puisque $\vec{n}_2 \neq k\vec{n}_1$, *les vecteurs* $\vec{n}_1$ *et* $\vec{n}_2$ *ne sont pas colinéaires,*
les plans (P_1) *et* (P_2) *sont sécants suivant une droite* (Δ)

b)

$C \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{vmatrix}$

et $1(1) - 2(3) + 2(3) - 1 = 0 \Rightarrow C \in (P_1)$

$1(1) - 3(3) + 2(3) + 2 = 0 \Rightarrow C \in (P_2)$

le point C appartient aux 2 plans (P_1) *et* (P_2) *alors* $C \in (\Delta)$

c)

Le vecteur $\vec{u}\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$ *est orthogonal à* $\vec{n}_1$ *et à* $\vec{n}_2$ *puisque*

$\vec{u}\,.\,\vec{n}_1 = (2)(1) + 0(-2) + (-1)(2) = 0$

$\vec{u}\,.\,\vec{n}_2 = (2)(1) + 0(-3) + (-1)(2) = 0$

$\vec{n}_1$ *est un vecteur normal à* (P_1)

$\vec{n}_2$ *est un vecteur normal à* (P_2)

alors $\vec{u}$ *est un vecteur directeur de la droite* (Δ)

d)

Une représentation paramétrique de la droite (Δ) *est*

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 3 \qquad k \in R \\ z = 3 - k \end{cases}$$

3. $a)$

$$\vec{AM} = \begin{vmatrix} x_M - x_A = 2k \\ y_M - y_A = 1 \\ z_M - z_A = -k+1 \end{vmatrix}$$

Les vecteurs $\vec{AM}$ *et* $\vec{u}$ *sont orthogonaux si*

$$2(2k) - 1(-k+1) = 0$$

soit $k = \frac{1}{5}$

$b)$ *Le point M de la droite* (Δ), *projection orthogonale de A sur la droite* (Δ) *a pour coordonnées*

$$M \begin{vmatrix} 7/5 \\ 3 \\ 14/5 \end{vmatrix}$$

et $AM^2 = (\frac{7}{5} - 1)^2 + (3-2)^2 + (\frac{14}{5} - 2)^2 = \frac{45}{25}$

la distance du point A à la droite (Δ)

est donnée par $AM = \frac{3\sqrt{5}}{5}$