Développements limites - Réponses

Exercice 1 - Réponse

Au vosinage de 0

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

$$x + x^2 + \frac{1}{2}x^3$$

$$-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

le point $M_0(0,0)$ est un point ordinaire

L'équation de la tangente M_0T est $y_T = x$

La courbe C_f est toujours au-dessus de sa tangente en M_0

La fonction $f(x) = e^x \sin x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$

D'après la formule de MacLaurain

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(\theta x) \text{ avec } 0 < \theta < 1$$

alors

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 1 \quad f''(0) = 2 \quad f'''(0) = 2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x \sin x - x - x^2}{x^2} = \frac{1}{3}$$

Exercice 2 - Réponse

$DL_3(0)$ de $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2} = (1 + x + x^2)^{1/2}$

on pose $u = x + x^2$ u est un infiniment petit d'ordre 1 par rapport à l'infiniment petit principal x

$$(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o(u^3)$$

$$\sqrt{1 + x + x^2} = 1 + \frac{1}{2}(x + x^2) - \frac{1}{8}(x + x^2)^2 + \frac{1}{16}(x)^3 + o(x^3)$$

$$\sqrt{1 + x + x^2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{16}x^3 + o(x^3)$$

Exercice 3 - Réponse

Au voisinage de 0 $\operatorname{Arctan} x \underset{0}{\sim} x$ et $\sin x \underset{0}{\sim} x$

par suite de la simplification par x pour obtenir un développement limité à l'ordre 4, il faut prendre les développements limités du numérateur et du dénominaterur à l'odre 5

$$f(x) = \frac{x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^6)}{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)} = \frac{1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + o(x^5)}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^5)}$$

En effectuant par exemple la division suivant les puissances croissantes ou bien en utilisant $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$

avec $u = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4$ et en effectuant un produit, on obtient

$$f(x) = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{59}{360}x^4 + o(x^5)$$

Exercice 4 - Réponse

$DL_4(0)$ de $f(x) = e^{\sin x}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$f(x) = e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}$$

on pose $u = x - \frac{x^3}{6}$ et u est un infiniment petit d'ordre 1 par rapport à l'infiniment petit principal x

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4)$$

$$f(x) = e^{\sin x} = 1 + (x - \frac{x^3}{6}) + \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6})^2 + \frac{1}{6}(x - \frac{x^3}{6})^3 + \frac{1}{24}(x - \frac{x^3}{6})^4 + o(x^4)$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

Exercice 5 - Réponse

$DL_4(0)$ de $f(x) = e^{\cos x}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$f(x) = e^{\cos x} = e^{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}$$

l'expression $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \to 1$ donc ne tend pas vers 0 lorsque $x \to 0$

on ne peut pas poser $u = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

on utilise alors la relation fonctionnelle des exponentielles

$$e^{a+b} = e^a . e^b$$

$$f(x) = e . e^{-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}$$

et maintenant $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \to 0$ quand $x \to 0$

u est un infiniment petit d'ordre 2 par rapport à l'infiniment petit principal x

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

$$f(x) = e\left[1 + (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}) + \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2})^2 + o(x^4)\right]$$

$$f(x) = e - e\frac{x^2}{2} + e\frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

Exercice 6 - Réponse

On utilise la transformation "exponentielle – logarithme"

$u^v = e^{v \ln u}$ avec $u > 0$, d'où $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(\operatorname{ch}x)}$

Pour obtenir $DL_3(0)$, on développe $\ln(\operatorname{ch}x)$ à l'ordre 4 puisque l'on doit diviser par x

$$\operatorname{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\ln(\operatorname{ch}x) = \ln\left[1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right]$$

on pose $u = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0

u est un infiniment petit d'ordre 2 /à l'infiniment petit principal x

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

$$\ln(\operatorname{ch}x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24})^2 + o(x^4)$$

$$\ln(\operatorname{ch}x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$\frac{1}{x}\ln(\operatorname{ch}x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

$$f(x) = e^{\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)}$$

on pose $v = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0

v est un infiniment petit d'ordre 1 /à l'infiniment petit principal x

$$e^v = 1 + v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{6} + o(v^3)$$

$$f(x) = 1 + (\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}) + \frac{1}{2}(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12})^2 + \frac{1}{6}(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12})^3 + o(x^3)$$

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

Exercice 7 - Réponse

$DL_3(0)$ de $f(x) = (1 + \sin x)^{\cos x}$

On utilise la transformation "exponentielle – logarithme" $u^v = e^{v \ln u}$ avec $u > 0$

$$f(x) = e^{\cos x \ln(1 + \sin x)}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\ln(1 + \sin x) = \ln(1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))$$

on pose $u = x - \frac{x^3}{6} \to 0$ quand $x \to 0$ avec u infiniment petit d'ordre 1 / à l'infiniment petit principal x

$$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$$

$$\ln(1 + \sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\cos x \ln(1 + \sin x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

on pose $u = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \to 0$ quand $x \to 0$ avec u infiniment petit d'ordre 1 / à l'infiniment petit principal x

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} o(u^3)$$

$$f(x) = 1 + x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

Exercice 8 - Réponse

Au voisinage de 0 : $\sin^2 x \sim x^2$ et $\ln(\cos x) \sim -\frac{x^2}{2}$

Par suite de la simplification par x^2 pour obtenir un développement limité à l'ordre 4, il faut prendre les développements limités du numérateur et du dénominateur à l'ordre 6

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$$

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + o(x^6)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$$

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)$$

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{\ln(\cos x)} = \frac{x^2(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{45} + o(x^4))}{x^2(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{45} + o(x^4))} = -2 + x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

Exercice 9 - Réponse

$$x\sqrt{1 + x - 2x^2} = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{8}x^3 + o(x^3)$$

$$\ln(1 + xe^x) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$f(x) = -\frac{23}{24}x^3 + o(x^3)$$

Exercice 10 - Réponse

$f(x) = \operatorname{Arctan}(\frac{1}{1-x})$ est de classe C^∞ au voisinage de 0

On effectue $DL_2(0)$ de $f'(x)$ au voisinage de 0, et on intègre

$$f'(x) = \frac{1}{2 - 2x + x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - (x - \frac{x^2}{2})}$$

on pose $u = x - \frac{x^2}{2}$ et u est un infiniment petit d'ordre 2 par rapport à l'infiniment petit principal x

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2)$$

$$\frac{1}{1 - (x - \frac{x^2}{2})} = 1 + (x - \frac{x^2}{2}) + (x - \frac{x^2}{2})^2 + o(x^2) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)$$

$$f(x) = \text{constante} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

puisque $f(0) = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{constante} = \frac{\pi}{4}$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

Exercice 11 - Réponse

Il faut effectuer le développement limité jusqu'à l'ordre $n = 4$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\tan[\ln(1+x)] = (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}) + \frac{1}{3}(x^3 - \frac{3x^4}{2}) + o(x^4)$$

$$\ln(1 + \tan x) = \ln(1 + x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)) = (x + \frac{x^3}{3}) - \frac{1}{2}(x + \frac{x^3}{3})^2 + \frac{1}{3}(x + \frac{x^3}{3})^3 - \frac{1}{4}(x + \frac{x^3}{3})^4 + o(x^4)$$

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$$

La partie principale de $f(x) = \tan[\ln(1+x)] - \ln[1 + \tan x]$ est $-\frac{1}{6}x^4$

Exercice 12 - Réponse

Il faut effe5ctuer le développement limité jusqu'à l'ordre $n = 7$

$$\sin^3 x = (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120})^3 + o(x^8) = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{13x^7}{120} + o(x^8)$$

$$x^3 \cos x = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{24} + o(x^8)$$

$$\sin^3 x - x^3 \cos x = \frac{x^7}{15} + o(x^8)$$

La partie principale de $\sin^3 x - x^3 \cos x$ est $\frac{1}{15}x^7$

Exercice 13 - Réponse

Forme indéterminée "$\frac{0}{0}$"

$$\ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$(1+2x)^{\frac{1}{2}} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$e^x - \sqrt{1+2x} = x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{e^x - \sqrt{1+2x}} = -\frac{1}{2}$$

Exercice 14 - Réponse

Forme indéterminée "$\frac{0}{0}$"

Le dénominateur (x^4) indique qu'il faut effectuer un développement limité du numérateur à l'ordre $n = 4$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$$

$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$$

$$\operatorname{ch}x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$$

puis

$$\ln(\operatorname{ch}x) = \ln\left[1 + (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4) + o(x^5)\right]$$

posons

$u = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$ et $u \to 0$ lorsque $x \to 0$

u est un infiniment petit d'ordre 2 par rapport à l'infiniment petit principal x

$$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$$

$$\ln(\operatorname{ch}x) = (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2)^2 + o(x^5) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)$$

$$1 - \cos x - \ln(\operatorname{ch}x) = \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x - \ln(\operatorname{ch}x)}{x^4} = \frac{1}{24}$$

Exercice 15 - Réponse

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1)\tan \pi x$$

Forme indéterminée "$0 \times \infty$"

Posons $f(x) = (2x^2 - 3x + 1)\tan \pi x$

On effectue la translation $x - \frac{1}{2} = h$ ou $x = \frac{1}{2} + h$

$$f(x) = f(\frac{1}{2} + h) = \left[2(\frac{1}{2} + h)^2 - 3(\frac{1}{2} + h) + 1\right]\tan(\frac{\pi}{2} + \pi h)$$

puisque $\sin(\frac{\pi}{2} + \pi h) = \cos \pi h$ et $\cos(\frac{\pi}{2} + \pi h) = -\sin \pi h$ alors $\tan(\frac{\pi}{2} + \pi h) = -\frac{1}{\tan \pi h}$

$$f(\frac{1}{2} + h) = \frac{-h + 2h^2}{-\tan \pi h}$$

$$\tan \pi h = \pi h + o(h)$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1)\tan \pi x = \frac{1}{\pi}$$

Exercice 16 - Réponse

$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} (\tan \frac{3x}{2})^{\tan 3x}$ Forme indéterminée "1^∞"

Effectuons la transformation "exponentielle logarithme"

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} e^{\tan 3x \ln(\tan \frac{3x}{2})}$$

posons $x - \frac{\pi}{6} = h$ ou $x = \frac{\pi}{6} + h$ et $h \to 0$ quand $x \to \frac{\pi}{6}$

$$L = \lim_{h \to 0} e^{\tan(\frac{\pi}{2} + 3h)\ln\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{3h}{2})}$$

Utilisons les formules de trigonométrie

$\tan(\frac{\pi}{2} + \varphi) = -\frac{1}{\tan \varphi}$ et $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ pour a et $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$L = \lim_{h \to 0} e^{-\frac{1}{\tan 3h}\ln\left(\frac{1 + \tan\frac{3h}{2}}{1 - \tan\frac{3h}{2}}\right)}$$

$$\tan\frac{3h}{2} = \frac{3h}{2} + o(h)$$

$$\ln(1 + \tan\frac{3h}{2}) = \ln(1 + \frac{3h}{2} + o(h))$$

$$\ln(1+u) = u + o(u)$$

$$\ln(1 + \tan\frac{3h}{2}) = \frac{3h}{2} + o(h)$$

$$\ln(1 - \tan\frac{3h}{2}) = -\frac{3h}{2} + o(h)$$

pour $a > 0$ et $b > 0$ alors $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$$\ln\left(\frac{1 + \tan\frac{3h}{2}}{1 - \tan\frac{3h}{2}}\right) = 3h + o(h)$$

$$L = \lim_{h \to 0} e^{-\frac{1}{3h + o(h)}(3h + o(h))} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Exercice 17 - Réponse

Forme indéterminée "1^∞"

Afin d'utiliser les développements limités valables au voisinage de l'origine, posons

$x = \frac{1}{h}$ ou $h = \frac{1}{x}$ et $h \to 0$ quand $x \to +\infty$

$$L = \lim_{x \to +\infty}\left[2\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{1 + \frac{2}{x}}\right]^{x^2} = \lim_{h \to 0}\left[2(1+h)^{\frac{1}{2}} - (1+2h)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{h^2}}$$

Utilisons la transformation "logarithme – exponentielle" $u^v = e^{v \ln u}$ avec $u > 0$

$$L = \lim_{h \to 0} e^{\frac{1}{h^2}\ln\left[2(1+h)^{\frac{1}{2}} - (1+2h)^{\frac{1}{2}}\right]}$$

$$(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)$$

$$2(1+h)^{\frac{1}{2}} = 2 + h - \frac{1}{4}h^2 + o(h^2)$$

$$(1+2h)^{\frac{1}{2}} = 1 + h - \frac{1}{2}h^2 + o(h^2)$$

$$L = \lim_{h \to 0} e^{\frac{1}{h^2}\ln(1 + \frac{1}{4}h^2 + o(h^2))}$$

$$\ln(1 + \frac{1}{4}h^2 + o(h^2)) = \frac{1}{4}h^2 + o(h^2)$$

$$L = \lim_{x \to +\infty}\left[2\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{1 + \frac{2}{x}}\right]^{x^2} = e^{\frac{1}{4}}$$

Exercice 18 - Réponse

Forme indéterminée "1^∞"

Afin d'utiliser les développements limités valables au voisinage de l'origine, posons

$x = \frac{1}{h}$ ou $h = \frac{1}{x}$ et $h \to 0$ quand $x \to +\infty$

$$L = \lim_{x \to +\infty} x\left(\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{3x} - \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x/2}\right) = \lim_{h \to 0}\frac{1}{h}\left((1 + \frac{h}{2})^{\frac{3}{h}} - (1+3h)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Utilisons la transformation "logarithme – exponentielle" $u^v = e^{v \ln u}$ avec $u > 0$

$$(1 + \frac{h}{2})^{3h} = e^{\frac{3}{h}\ln(1 + \frac{h}{2})} = e^{\frac{3}{h}\left[\frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2)\right]} = e^{\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{9h}{4} + o(h)}$$

$$(1+3h)^{\frac{1}{2h}} = e^{\frac{1}{2h}\ln(1+3h)} = e^{\frac{1}{2h}\left[3h - \frac{9h^2}{4} + o(h^2)\right]} = e^{\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{3h}{8} + o(h)}$$

$$L = \lim_{h \to 0}\frac{e^{\frac{3}{2}}(e^{-\frac{3h}{8}} - e^{-\frac{9h}{4}})}{h} = \lim_{h \to 0}\frac{e^{\frac{3}{2}}\left[(1 - \frac{3h}{8} + o(h)) - (1 - \frac{9h}{4} + o(h))\right]}{h} = \frac{15}{8}e^{\frac{3}{2}}$$

Exercice 19 - Réponse

$DL_3(\frac{\pi}{4})$ de $f(x) = \sqrt{\tan x}$

posons $x = \frac{\pi}{4} + h$ ou $h = x - \frac{\pi}{4}$

$$\tan x = \tan(\frac{\pi}{4} + h) = \frac{1 + \tan h}{1 - \tan h}$$

puisque $\tan h = h + \frac{h^3}{3} + o(h^4)$

$$\text{alors } \tan(\frac{\pi}{4} + h) = \frac{1 + h + \frac{h^3}{3} + o(h^4)}{1 - h - \frac{h^3}{3} + o(h^4)} = 1 + 2h + 2h^2 + \frac{8}{3}h^3 + o(h^3)$$

on utilise $(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o(u^3)$

avec $u = 2h + 2h^2 + \frac{8}{3}h^3$

$$\left[\tan(\frac{\pi}{4} + h)\right]^{\frac{1}{2}} = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{5}{6}h^3 + o(h^3)$$

d'où

$$\sqrt{\tan x} = 1 + (x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{5}{6}(x - \frac{\pi}{4})^3 + o(x - \frac{\pi}{4})^3$$

Exercice 20 - Réponse

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x} = \sqrt[3]{x^3(1 + \frac{1}{x^2})} - \sqrt[3]{x^3(1 - \frac{1}{x^2})} = x\left[\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}}\right]$$

posons $u = \frac{1}{x}$ et $u \to 0$ quand $x \to +\infty$

$$f(\frac{1}{u}) = \frac{1}{u}\left[\sqrt[3]{1 + u^2} - \sqrt[3]{1 - u^2}\right]$$

$\sqrt[3]{1 + u^2} = (1 + u^2)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}u^2 - \frac{1}{9}u^4 + o(u^5)$ (fonction paire)

$\sqrt[3]{1 - u^2} = (1 - u^2)^{1/3} = 1 - \frac{1}{3}u^2 - \frac{1}{9}u^4 + o(u^5)$ (fonction paire)

$$\sqrt[3]{1 + u^2} - \sqrt[3]{1 - u^2} = \frac{2}{3}u^2 + o(u^5)$$

$$f(\frac{1}{u}) = \frac{2}{3}u + o(u^4)$$

et

$$f(x) = \frac{2}{3x} + o(\frac{1}{x^4})$$

Exercice 21 - Réponse

$f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$ $D_f = \mathbb{R}$ et $D_{f'} = \mathbb{R} - \{0, 2\}$

Etude des branches infinies

$$f(x) = x(1 - \frac{2}{x})^{\frac{1}{3}}$$

posons $u = -\frac{2}{x} \to 0$ quand $x \to 0$, u est un infiniment petit d'ordre 1 par rapport à x

$$(1+u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + o(u^2)$$

$$f(x) = x\left[1 + \frac{1}{3}(-\frac{2}{x}) - \frac{1}{9}(-\frac{2}{x})^2 + o(\frac{1}{x^2})\right] = x - \frac{2}{3} - \frac{4}{9x} + o(\frac{1}{x})$$

La courbe (C_f) admet la droite (D) d'équation $y = x - \frac{2}{3}$ pour asymptote oblique

La courbe (C_f) est au-dessus de (D) lorsque $x \to -\infty$

La courbe (C_f) est en-dessous de (D) lorsque $x \to +\infty$

Exercice 22 - Réponse

C'est une forme indéterminée "1^∞"

On pose $h = \frac{1}{x}$ ou $x = \frac{1}{h}$ et $h \to 0$ quand $x \to +\infty$

Pour $x > 0$, $\operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2} - h + o(h^2)$

$$\operatorname{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{x+1} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{h}{1+h} = \frac{\pi}{2} - h + h^2 + o(h^2)$$

$$\frac{\operatorname{Arctan}(x+1)}{\operatorname{Arctan} x} = \frac{1 - \frac{2h}{\pi} + \frac{2h^2}{\pi} + o(h^2)}{1 - \frac{2h}{\pi} + o(h^2)} = 1 + \frac{2h^2}{\pi} + o(h^2)$$

$$\left(\frac{\operatorname{Arctan}(x+1)}{\operatorname{Arctan} x}\right)^2 = e^{\frac{1}{h^2}\ln(1 - \frac{2h^2}{\pi} + o(h^2))} = e^{\frac{2}{\pi} + o(1)}$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{\operatorname{Arctan}(x+1)}{\operatorname{Arctan} x}\right)^2 = e^{\frac{2}{\pi}}$$