Fonctions hyperboliques - Réponses

Exercice 1 - Réponse

Résoudre dans $\mathbb{R}$: (I) $\operatorname{ch}x + 2\operatorname{sh}x = 3$

En tenant compte des définitions de ch x et sh x, l'équation (I) s'écrit

$$(I) \Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 2\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 3$$

ou encore

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x}+1}{2} + 2\frac{e^{2x}-1}{2} = 3e^x$$

$$\Leftrightarrow 3(e^x)^2 - 6e^x - 1 = 0$$

en posant $X = e^x$ avec $X > 0$

Seule la racine positive de l'équation du second degré convient, d'où

$$X = e^x = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$$

L'équation proposée admet une solution unique $\ln(1+\frac{2}{\sqrt{3}})$

Exercice 2 - Réponse

L'équation est définie pour $x > 0$

$$(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x\ln\sqrt{x} = \sqrt{x}\ln x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x\ln x = \sqrt{x}\ln x \Leftrightarrow (\frac{1}{2}x - \sqrt{x})\ln x = 0$$

L'équation proposée admet deux solutions : 1 et 4

Exercice 3 - Réponse

Rappel la fonction $t \mapsto \operatorname{Argch}t$ est définie pour $t \in [1, +\infty[$

et $\operatorname{Argch}t = \ln(t + \sqrt{1-t^2})$

L'étude de la fonction auxiliaire

$u : x \mapsto \frac{1+x^2}{1-x^2}$ montre que la fonction $\operatorname{Argch}\frac{1+x^2}{1-x^2}$ est définie pour $x \in]-1, 1[$

$$\operatorname{Argch}\frac{1+x^2}{1-x^2} = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2} + \sqrt{(\frac{1+x^2}{1-x^2})^2 - 1}\right) = \ln(\frac{1+x^2}{1-x^2} + \frac{\sqrt{4x^2}}{|1-x^2|}) = \ln(\frac{1+x^2+2|x|}{1-x^2})$$

- 1er cas $x \in [0, 1[$ alors $|x| = x$

$$\operatorname{Argch}\frac{1+x^2}{1-x^2} = \ln(\frac{1+x^2+2x}{1-x^2}) = \ln(\frac{(1+x)^2}{(1+x)(1-x)}) = \ln(\frac{1+x}{1-x}) = 2\operatorname{Argth}x$$

- 2eme cas $x \in]-1, 0[$ alors $|x| = -x$

$$\operatorname{Argch}\frac{1+x^2}{1-x^2} = \ln(\frac{1+x^2-2x}{1-x^2}) = \ln(\frac{(1-x)^2}{(1+x)(1-x)}) = \ln(\frac{1-x}{1+x}) = -2\operatorname{Argth}x$$

Exercice 4 - Réponse

Simplifier l'expression $\operatorname{Argsh}\frac{x^2-1}{2x}$

La fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$$\left[\operatorname{Argsh}\frac{x^2-1}{2x}\right]' = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \operatorname{Argsh}\frac{x^2-1}{2x} = \begin{cases} \ln x + K & \text{si } x > 0 \\ -\ln(-x) + K' & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On donne à x la valeur 1 $\Rightarrow K = 0$

On donne à x la valeur -1 $\Rightarrow K' = 0$

$$\text{et } \operatorname{Argsh}\frac{x^2-1}{2x} = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ -\ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exercice 5 - Réponse

on a $\operatorname{ch}y = \frac{\operatorname{sh}2y}{2\operatorname{sh}y}$ $(y \neq 0)$

$$P_n(x) = \prod_{p=1}^{n} \frac{\operatorname{sh}(\frac{x}{2^{p-1}})}{2\operatorname{sh}(\frac{x}{2^p})} = \frac{1}{2^n}\frac{\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(\frac{x}{2})\ldots\ldots\ldots\operatorname{sh}(\frac{x}{2^{n-1}})}{\operatorname{sh}(\frac{x}{2})\operatorname{sh}(\frac{x}{2^2})\ldots\ldots\ldots\operatorname{sh}(\frac{x}{2^n})} = \frac{1}{2^n}\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}(\frac{x}{2^n})} \qquad (x \neq 0)$$

De l'équivalence $\operatorname{sh}u \underset{0}{\sim} u$, on tire $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n\operatorname{sh}(\frac{x}{2^n}) = x$

et

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \frac{\operatorname{sh}x}{x}$$

Exercice 6 - Réponse

Résoudre l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Argth}x + \operatorname{Argth}2x = \operatorname{Argth}\frac{2}{3} \quad (I)$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in]-1, 1[\text{ et } 2x \in]-1, 1[\} =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$$

Sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ en utilisant l'écriture logarithmique, on a :

$$(I) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+2x}{1-2x} = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}\frac{1+2x}{1-2x}) = \frac{1}{2}\ln 5$$

$$\Leftrightarrow (1+x)(1+2x) = 5(1-x)(1-2x)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 9x + 2 = 0$$

Une seule solution convient $x = \frac{1}{4}$