Fonctions trigonomètriques réciproques

Exercice 1

Simplifier

$a_1 = \text{Arc}\sin(\sin\frac{\pi}{4})$ $\quad a_2 = \text{Arc}\cos(\cos\frac{\pi}{4})$ $\quad a_3 = \text{Arc}\tan(\tan\frac{\pi}{4})$

$b_1 = \text{Arc}\sin(\sin\frac{3\pi}{4})$ $\quad b_2 = \text{Arc}\cos(\cos\frac{3\pi}{4})$ $\quad b_3 = \text{Arc}\tan(\tan\frac{3\pi}{4})$

$c_1 = \text{Arc}\sin(\sin\frac{5\pi}{4})$ $\quad c_2 = \text{Arc}\cos(\cos\frac{5\pi}{4})$ $\quad c_3 = \text{Arc}\tan(\tan\frac{5\pi}{4})$

$d_1 = \text{Arc}\sin(\sin\frac{7\pi}{4})$ $\quad d_2 = \text{Arc}\cos(\cos\frac{7\pi}{4})$ $\quad d_3 = \text{Arc}\tan(\tan\frac{7\pi}{4})$

Exercice 2

Calculer

$u_1 = \text{Arc}\tan\frac{1}{2} + \text{Arc}\tan\frac{1}{3}$ puis $u_2 = \text{Arc}\tan 2 + \text{Arc}\tan 3$

$v_1 = \text{Arc}\tan\frac{1}{2} + \text{Arc}\tan\frac{1}{5} + \text{Arc}\tan\frac{1}{8}$ puis $v_2 = \text{Arc}\tan 2 + \text{Arc}\tan 5 + \text{Arc}\tan 8$

$w_1 = \text{Arc}\tan\frac{1}{3} + \text{Arc}\tan\frac{1}{5} + \text{Arc}\tan\frac{1}{7} + \text{Arc}\tan\frac{1}{8}$ puis $w_2 = \text{Arc}\tan 2 + \text{Arc}\tan 3 + \text{Arc}\tan 7 + \text{Arc}\tan 8$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$\text{Arc}\tan 2x + \text{Arc}\tan 3x = -\frac{\pi}{4}$

$\text{Arc}\sin\frac{4}{5} + \text{Arc}\sin\frac{5}{13} = \text{Arc}\sin x$

$\text{Arc}\cos\frac{1}{3} + \text{Arc}\cos\frac{1}{4} = \text{Arc}\sin x$

$\text{Arc}\cos\frac{1}{3} + \text{Arc}\cos\frac{1}{4} = \text{Arc}\cos x$

Exercice 4

Donner une expression plus simple des fonctions:

$f : x \mapsto \cos^2(\frac{1}{2}\text{Arc}\cos x)$ puis $g : x \mapsto \sin^2(\frac{1}{2}\text{Arc}\cos x)$

Exercice 5

Soit l'équation

(E) $\text{Arc}\tan(x-1) + \text{Arc}\tan x + \text{Arc}\tan(x+1) = \frac{\pi}{2}$

Montrer (sans résoudre l'équation) que (E) admet une solution unique et que cette solution appartient à $]0,1[$. En déduire la solution de (E)

Exercice 6

Etudier la fonction $f : x \mapsto \text{Arc}\tan\frac{1+x}{1-x}$

Exercice 7

Etudier la fonction $f : X \mapsto \text{Arc}\sin(\sin X)$

$g_1 : x \mapsto \text{Arc}\sin$

$g_2 : x \mapsto \text{Arc}\sin(2x\sqrt{1-x^2})$

$g_3 : x \mapsto \text{Arc}\sin(3x - 4x^3)$

$g_4 : x \mapsto \text{Arc}\sin\frac{2x}{1+x^2}$

$g_5 : x \mapsto \text{Arc}\sin\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}}$

Exercice 8

Etudier la fonction:

$f : x \mapsto \text{Arc}\cos(\cos x) + \frac{1}{2}\text{Arc}\cos(\cos 2x)$

Exercice 9

Calculer la dérivée de la fonction

$f(x) = \text{Arc}\tan x + 2\,\text{Arc}\tan(\sqrt{1+x^2} - x)$

En déduire la résolution de l'équation

$\text{Arc}\tan x + 2\,\text{Arc}\tan(\sqrt{1+x^2} - x) = \frac{\pi}{2}$

Exercice 10

On pose $f(x) = \text{Arc}\sin\frac{2x}{1+x^2}$ $\quad g(x) = \text{Arc}\tan\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ et $h(x) = f(x) + g(x)$

1. Montrer que $\text{Arc}\tan(\sqrt{2}-1) = \frac{\pi}{8}$

2. Préciser les ensembles de définition et de dérivabilité des fonctions f, g et h.
3. Calculer les dérivées de ces fonctions.
   (On simplifiera g'(x) de manière à l'exprimer sans radical)
4. Exprimer h(x) en fonction de Arc tan x.
5. Etudier les variations de h et tracer sa courbe représentative.

Exercice 11

Etudier les fonctions:

$f : x \mapsto \text{Arc}\tan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ puis $g : x \mapsto \text{Arc}\tan\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$