

Intégrale d'une fonction continue



Exercice 1

Déterminer

$$f(x) = \int_0^1 \inf(x, t) dt \quad \text{puis} \quad g(x) = \int_0^1 \max(x, t) dt$$



Exercice 2

Soit I_n la suite définie par $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$
2. Considérer nI_n et intégrer par parties
3. En utilisant $\forall t \geq 0, \quad 0 \leq \ln(1+t) \leq t$

donner un équivalent de I_n quand $n \rightarrow +\infty$



Exercice 3

Soit f continue sur \mathbb{R} , déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$

Application : calculer $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\text{Arc tan } t}{t} dt$



Exercice 4

Démontrer $0 \leq \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$ si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[n]{\sin x} dx$



Exercice 5

Etudier la fonction $f : x \mapsto \int_{-x/2}^{x/2} |t+x| \sin t dt$



Exercice 6

Calculer la dérivée de la fonction

$$f : x \mapsto \int_2^x t x \sin(x+t) dt$$



Exercice 7

Déterminer la limite de la suite de terme général

$$I_n = \int_0^1 \frac{1+t^n - t^{2n}}{1-t} dt, \quad n \in \mathbb{N}^*$$



Exercice 8

Soit f continue sur \mathbb{R} , déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt$ avec a et $b > 0$

Application

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt$$

$$I_2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

$$I_3 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{\text{Arc sin } t} dt$$



Exercice 9

$$\text{Soit } f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$$

Déterminer le domaine de définition

Calculer la dérivée

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$



Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, montrer que l'application

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_x^b f(x+t) dt$$

est dérivable en tout point x de \mathbb{R} .



Exercice 11

Soit une fonction g définie sur \mathbb{R} .

$$\text{On pose } f(x) = \int_{2x}^{3x} g(t) dt$$

Calculer $f'(x)$



Exercice 12

$$\text{Etudier la fonction } f : x \mapsto f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$$