Intégrale d'une fonction continue - Réponses

Exercice 1 - Réponse

Si $x \leq 0$ alors $\inf(x,t) = x$ et $f(x) = \int_0^1 x\,dt = x\int_0^1 dt = x$

Si $0 < x < 1$ alors $\inf(x,t) = x$ si $x \leq t$ et t si $x > t$

d'où $f(x) = \int_0^x t\,dt + \int_x^1 x\,dt = x - \frac{1}{2}x^2$

Si $x > 1$ alors $f(x) = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \text{ si } 0 < x < 1 \\ x \quad \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 2 - Réponse

$\forall x \in [0,1] \quad 0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$

l'intégration sur $[0,1]$ conserve le sens des inégalités

$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

En appliquant la formule des accroissements finis à la fonction

$f(t) = \ln(1+t)$ sur $[0,t]$ pn obtient

$\forall t \geq 0 \qquad 0 \leq \ln(1+t) \leq t$

Intégrons par parties $nI_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n}\,dx$

$u = x \qquad u' = 1$

$v' = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} \qquad v = \ln(1+x^n)$

soit $nI_n = \left[x\ln(1+x^n)\right]_0^1 - \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$

$nI_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$

utilisons la relation proposée par l'énoncé

$\forall x \geq 0 \qquad 0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$

soit $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$

$\ln 2 - \frac{1}{n+1} \leq nI_n \leq \ln 2$

et donc $\lim_{n\to+\infty} I_n = \ln 2$

soit $nI_n \underset{+\infty}{\sim} \ln 2$ et $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}$

Exercice 3 - Réponse

f est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\int_0^x f(t)\,dt$ existe

On applique la 1ère formule de la moyenne

il existe $c_x \in [0,x]$ tel que $\int_0^x f(t)\,dt = x\,f(c_x)$

et donc $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = f(c_x)$ qui tend vers $f(0)$ lorsque x tend vers 0

car f est continue

$\lim_{x\to0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = f(0)$

La fonction $f(t) = \frac{\text{Arc}\tan t}{t}$ prolongée par continuité en 0

en posant $f(0) = 1$ est continue sur $\mathbb{R}$

$\lim_{x\to0} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\text{Arc}\tan t}{t}\,dt = 1$

Exercice 4 - Réponse

si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{\sin x} \leq x^{\frac{1}{n}}$

$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1}\left[x^{\frac{n+1}{n}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[n]{\sin x}\,dx \leq \frac{n}{n+1}\left[x^{\frac{n+1}{n}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\frac{n}{n+1}\,\frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[n]{\sin x}\,dx \leq \frac{n}{n+1}\,\frac{\pi}{2}\,\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

par encadrement

$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[n]{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

Exercice 5 - Réponse

$\varphi(t) = |t+x|\sin t$ est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, l'intégrale existe

Montrons que la fonction est impaire

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |t-x|\sin t\,dt$

effectuons le changement de variable $u = -t$

$f(-x) = \int_{+\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} |u+x|\sin u\,du = -f(x)$

pour $x \geq \frac{\pi}{2} \quad f(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (t+x)\sin t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt + x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt$

la première intégrale se calcule par parties et la seconde est nulle puisqe

l'on intègre une fonction impaire sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

pour $0 < x < \frac{\pi}{2} \qquad f(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-x} (-t-x)\sin t\,dt + \int_{-x}^{\frac{\pi}{2}} (t+x)\sin t\,dt = 2\sin x$

Exercice 6 - Réponse

Utilisons la relation sin(a+b)=sinacosb+sinbcosa

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x\sin x\int_2^x t\cos t\,dt + x\cos x\int_2^x t\sin t\,dt$

Les fonctions $\int_2^x t\cos t\,dt$ et $\int_2^x t\sin t\,dt$ et admettent respectivement pour dérivées

$x\cos x$ et $x\sin x$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (\sin x + x\cos x)\int_2^x t\cos t\,dt + (\cos x - x\sin x)\int_2^x t\sin t\,dt + 2x^2\sin x\cos x$

$f'(x) = \int_2^x t\left[\sin(x+t) + x\cos(x+t)\right]dt + x^2\sin 2x$

Exercice 7 - Réponse

Rappel $\quad a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$

La fonction $f_n(t) = \frac{t^n - t^{2n}}{1-t} = t^n\frac{1-t^n}{1-t} = t^n(1+t+\ldots+t^{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} t^{n+k-1}$

est continue sur $[0,1[$ et prolongeable par continuité en 1 en posant $f_n(1) = n$

L'intégrale $\int_0^1 f_n(t)dt$ existe pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$I_n = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} t^{n+k-1}dt$ par suite de la linéarité de l'intégration (n est fini)

$I_n = \sum_{k=1}^{n}\int_0^1 t^{n+k-1}dt = \sum_{k=1}^{n}\left[t^{n+k}\right]_0^1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)}$

I_n est une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{1}{1+x}$

sur l'intervalle $[0,1]$

$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$

Exercice 8 - Réponse

Les deux bornes de cette intégrale tendent vers 0

On applique la seconde formule de la moyenne

Hypothèses:

f et g continues sur $[a,b]$

g de signe constant sur $[a,b]$

Conclusion:

il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$

On prend $g(t) = \frac{1}{t}$ et donc $g(t)$ est positive sur l'intervalle d'intégration,

alors que l'on ne connait pas de signe de $f(t)$

$\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,dt = f(c_x)\int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} = f(c_x)\ln\frac{b}{a}$ avec $c_x \in [ax, bx]$

puisque c_x tend vers 0 quand x tend vers 0

alors $\lim_{x\to0} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,dt = f(0)\ln\frac{b}{a}$

$l_1 = \lim_{x\to0} \int_{ax}^{bx} \frac{\cos t}{t}\,dt = \ln 2$ avec $f(t) = \cos t$

$l_2 = \lim_{x\to0} \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2}\,dt = \ln 2$ avec $f(t) = \frac{\sin t}{t}$

$l_3 = \lim_{x\to0} \int_{ax}^{bx} \frac{e^t}{\text{Arc}\sin t}\,dt = \ln 2$ avec $f(t) = \frac{te^t}{\text{Arc}\sin t}$

Exercice 9 - Réponse

Domaine de définition

La fonction $\varphi(t) = \frac{\cos t}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc intégrable

$f(x)$ est définie sur $]0, +\infty[$

Dérivée

$f'(x) = \frac{\cos 3x - \cos x}{x} = -\frac{2\sin 2x\sin x}{x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{N})$

Limite en 0

On applique la 2ème formule de la moyenne

il existe $c_x \in [x, 3x]$ tel que $f(x) = c_x\int_x^{3x} \frac{dt}{t} = c_x\ln 3$

lorsque $x \to 0$ alors $c_x \to 0$ et donc $\lim_{x\to0} f(x) = \ln 3$

Limite en l'infini

$f(x) = \left[\frac{\sin t}{t}\right]_x^{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$

on utilise l'inégalité $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$

alors puisque $\left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$

$\left|\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,dt\right| \leq \int_x^{3x} \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{3x}$

alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Exercice 10 - Réponse

Exercice 11 - Réponse

Soit G une primitive (inconnue) de g sur $\mathbb{R}$

soit $G'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

alors $f(x) = G(3x) - G(2x)$

et en appliquant le théorème de dérivation des fonctions composées

$f'(x) = 3G'(3x) - 2G'(2x) = 3g(3x) - 2g(2x)$

Exercice 12 - Réponse

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ est , continue sur $\mathbb{R}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$

- la fonction f est impaire

utilisons le changement de variable $u = -t$

$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} = \int_{-x}^{2x} \frac{-du}{\sqrt{u^4+u^2+1}} = -f(x)$

on étudie donc la fonction f sur $[0, +\infty[$ et on complète la représentation graphique par symétrie par rapport au point O

- La fonction f est l'intégrale d'une fonction positive sur $[0, +\infty[$ donc f est positive sur $[0, +\infty[$ de plus $f(0) = 0$
- f est dérivable sur $[0, +\infty[$

si Φ est une primitive (inconnue) de $\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$

alors

$f(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$ et $f'(x) = 2\Phi'(2x) - \Phi'(x) = \frac{2}{\sqrt{(2x)^4+(2x)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$

alors

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow 2\sqrt{x^4+x^2+1} \geq \sqrt{16x^4+4x^2+1} \\ &\Leftrightarrow 12x^4 \leq 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 \leq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow |x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

partons de $\sqrt{t^4+t^2+1} \geq t^2$

pour $x \in [0, +\infty[$ alors

$\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \leq \frac{1}{t^2}$

et $f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} \leq \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = \frac{1}{2x}$

et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$