

Intégrales simples - Réponses

Exercice 1 - Réponse

$$F_1 = \int (x-2)^5 \, dx = \frac{1}{6}(x-2)^6 + C \quad \text{sur } 1 = \mathbb{R}$$
$$F_2 = \int (2x-1)^5 \, dx = \frac{1}{6} (2x-1)^6 + C \quad \text{sur } 1 = \mathbb{R}$$
$$F_3 = \int (3x^2+1)^5 \, dx = \int (3x^2)^5 + 6x^2 + 1 \, dx = \frac{9^5}{6} x^3 + 2x^2 + x + C \quad \text{sur } 1 = \mathbb{R}$$
$$F_4 = \int (x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})^5 \, dx = \int (x^2 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}) \, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5} x^{\frac{5}{2}} + \ln x + C \quad \text{sur } 1 =]0, +\infty[$$

Exercice 2 - Réponse

$$F_4 = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx = -\frac{1}{\sin x} + C \quad \text{sur } 1 =]0, \pi[$$

en posant $u(x) = \sin x$ d'où $u'(x) = \cos x$

$$F_5 = \int \frac{u'(x)}{u^2(x)} \, dx = -\frac{1}{u(x)} + C \quad \text{si } u(x) \neq 0$$
$$F_6 = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx = \frac{1}{\cos x} + C \quad \text{sur } 1 = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$
$$F_6 = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx = -\frac{1}{2 \sin^2 x} + C \quad \text{sur } 1 =]0, \pi[$$
$$\text{car } \frac{u'(x)}{u^2(x)} = -\frac{1}{2u^2(x)} + C \quad \text{si } u(x) \neq 0$$

Exercice 3 - Réponse

$$F_8 = \int \frac{x^2}{1+x^4} \, dx = \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + C$$
$$F_9 = \int \frac{u'(x)}{u(x)} \, dx = \ln u(x) + C \quad \text{si } u(x) > 0$$
$$F_9 = \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{4} \frac{1}{(1+x^2)} + C$$
$$F_{10} = \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{1+x^2} + C$$
$$F_{10} = \int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \, dx = 2 \sqrt{u(x)} + C \quad \text{si } u(x) > 0$$

Exercice 4 - Réponse

$$F_{11} = \int \frac{dx}{4x^2+12x+9} = \int \frac{dx}{(2x+3)^2} = \left[-\frac{1}{2(2x+3)} + C_1 \mid x \in \left] -\infty, -\frac{3}{2} \right[\right]$$
$$F_{11} = \int \frac{dx}{4x^2+12x+9} = \left[\frac{1}{2} \frac{1}{(2x+3)} + C_2 \mid x \in \left] -\frac{3}{2}, +\infty \right[\right]$$
$$F_{12} = \int \frac{x+1}{x^2+2x+5} \, dx$$

$u(x) = x^2 + 2x + 5 \implies u'(x) = 2x + 2$

$$F_{12} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 5) + C \quad \text{car } x^2 + 2x + 5 > 0 \quad \forall x \text{ (puisque } \Delta < 0)$$

Exercice 5 - Réponse

RAPPEL

Primitivation par parties:

$$\int u \, v'(x) \, dx = u \, v - \int v' \, u(x) \, dx$$

N'introduire la constante qu'à la fin du calcul

$$F_{13} = \int x \cos x \, dx$$

$u = x \implies u' = 1$
 $v = \sin x \implies v' = \cos x$

$$F_{13} = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$
$$F_{14} = \int x^2 \cos x \, dx$$

$u = x^2 \implies u' = 2x$
 $v = \sin x \implies v' = \cos x$

$$F_{14} = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx$$

On intègre une seconde fois par parties en posant toujours u égal au polynôme pour abaisser son degré

$u = x \implies u' = 1$
 $v = -\cos x \implies v' = \sin x$

$$F_{14} = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x \, dx$$
$$F_{14} = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

Exercice 6 - Réponse

La fonction $f(x) = \ln x$ est transcendante et sa dérivée $f'(x) = \frac{1}{x}$ est algébrique.

On intègre par parties en posant u égal au logarithme.

$u = \ln x \implies u' = \frac{1}{x}$
 $v = \frac{1}{3} x^3 \implies v' = x^2$

$$F_{15} = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^3 \frac{1}{x} \, dx$$
$$F_{15} = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx$$
$$F_{15} = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C \quad \text{si } x \in]0, +\infty[$$

La fonction $f(x) = e^x$ est transcendante et égale à sa dérivée.

On intègre par parties en posant u égal à l'exponentielle.

$$F_{16} = (x^2 - 2x + 2)e^x + C \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

On intègre une seconde fois par parties

$$F_{16} = (x^3 - 2x + 2)e^x + C$$

Exercice 7 - Réponse

$$F_{17} = \int e^{\mu x} \sin 2x \, dx$$

On intègre par parties deux fois de suite et "dans le même sens" par exemple

$u = e^x \implies u' = e^x$
 $v = -\frac{1}{2} \cos 2x \implies v' = \sin 2x$

$$F_{17} = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{2} \int e^x \sin 2x \, dx$$

On intègre une seconde fois par parties

$u = e^x \implies u' = e^x$
 $v = \frac{1}{2} \sin 2x \implies v' = \cos 2x$

$$F_{17} = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \left[\frac{1}{2} \frac{1}{2} e^x \sin 2x - \frac{1}{2} \int e^x \sin 2x \, dx \right]$$
$$F_{17} = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} e^x \sin 2x - \frac{1}{4} F_{17} + C$$

Equation permettant d'obtenir le résultat

$$\frac{5}{4} F_{17} = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} e^x \sin 2x + C$$
$$F_{17} = \frac{e^x}{5} [-2 \cos 2x + \sin 2x] + C$$

On peut également procéder par dérivation puis par identification.

On pose a priori le résultat sous la forme

$$F_{17} = \int e^{\mu x} \sin 2x \, dx = e^{\mu x} [\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x] + C$$

On dérive

$$e^{\mu x} \sin 2x = e^{\mu x} [(0 + 2\mu) \cos 2x + (\mu - 2\lambda) \sin 2x] + C$$

et on identifie

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 0 \\ -2\lambda + \mu = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda = -\frac{2}{5} \\ \mu = \frac{1}{5} \end{cases}$$
$$F_{18} = \int e^{-x} \cos 3x \, dx = \frac{e^{-x}}{10} (-\cos 3x + 3 \sin 3x) + C$$

Exercice 8 - Réponse

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2dx}{2x+1} = \frac{1}{2} [\ln(2x+1)]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln 3$$
$$I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x}{1-4x} \, dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-4dx}{1-4x} = -\frac{1}{4} [\ln(1-4x)]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \ln 2$$
$$I_3 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2dx}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2x+1} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$
$$I_4 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-4x)^2} = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-4x)^2} \, dx = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{1-4x} \right]_0^{\frac{1}{2}} = 1$$

Exercice 9 - Réponse

$\int \sin^p x \cos^q x \, dx$	m impair	m pair
p impair	t= sinx ou t=cosx	t= sinx
p pair	t=cosx	linearisation(Euler)

$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{2} \right) dx = \left[\frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{3}{2} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}$

$I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \, dx$

$I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin x \, dx$

$I_6 = \left[-\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{15}$

Exercice 10 - Réponse

On intègre par parties

$$I_7 = \frac{2e^{\frac{5}{3}} + 1}{9} \quad I_8 = e - 2 \quad I_9 = 1 - 5e^{-1} = 1 - \frac{5}{e}$$

Exercice 11 - Réponse

Calcul de $I_{10} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$

Utilisons deux fois de suite la formule d'intégration par parties

$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx$

La formule d'application indéfiniment en posant la fonction u égale à l'exponentielle ou la fonction u égale à l'expression trigonométrique

Possons (par exemple)

$u = e^{-x} \implies u' = -e^{-x}$
 $v = \sin x \implies v' = \cos x$

$I_{10} = \left[e^{-x} \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x} \sin x \, dx$

Intégrons une seconde fois par parties (dans le même sens)

$u = e^{-x} \implies u' = -e^{-x}$
 $v = -\cos x \implies v' = \sin x$

$I_{10} = \left[e^{-x} \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[e^{-x} \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x} \cos x \, dx$

On reconnaît I_{10} au second membre

$I_{10} = \left[e^{-x} \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[e^{-x} \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - I_{10}$

d'où l'équation

$2 I_{10} = \left[e^{-x} \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[e^{-x} \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

et

$I_{10} = \left[\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right] - \frac{1}{2} e^0 (0 - 1) = \frac{1}{2}$

$I_{10} = \frac{1}{2} \quad I_{11} = \frac{1}{5} \left(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{5} - (1 + 2\sqrt{5}) \right)$

Exercice 12 - Réponse

VOIR LE CHAPITRE FRACTIONS RATIONNELLES

on décompose en éléments simples les fractions rationnelles

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x-2}$$
$$F_9 = \int \frac{dx}{x-1} + 2 \int \frac{dx}{x-2}$$
$$\left[-\ln(x-1) + 2 \ln(x-2) + C_1 \mid x \in]2, +\infty[\right]$$
$$F_9 = \left[-\ln(x-1) + 2 \ln(x-2) + C_2 \mid x \in]1, 2[\right] \cup \left[1 + \ln \left(\frac{2x-1}{3} \right) \mid \right]$$
$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$
$$F_{10} = \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{1+x^2}$$
$$F_{10} = \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1 \mid x \in]0, +\infty[\right] \cup \left[\ln(-x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_2 \mid x \in]-\infty, 0[\right]$$

Exercice 13 - Réponse

Le trinôme du second degré $2x^2 + 2x + 5$ ayant un $\Delta < 0$ est toujours du signe de a donc positif, le dénominateur ne s'annule jamais et l'intégrale I_{11} existe

Effectuons la décomposition canonique du trinôme

$2x^2 + 2x + 5 = 2 \left[x^2 + x + \frac{5}{2} \right] = 2 \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{9}{4} \right] = \frac{9}{2} \left[\frac{4}{9} \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + 1 \right]$

$I_{12} = \frac{2}{9} \int \frac{1}{\frac{4}{9} \left(\frac{2x+1}{3} \right)^2 + 1} \, dx$

on pose $t = \frac{2x+1}{3}$ ou $x = \frac{3t-1}{2} \implies dx = \frac{3}{2} dt$

si $x = -\frac{1}{2}$ alors $t = 0$ et si $x = 1$ alors $t = 1$

$I_{12} = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{\frac{4}{9} t^2 + 1} \, dt = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1 \, dt}{t^2 + \frac{4}{9}} = \frac{1}{3} \left[\frac{3}{4} \arctan \frac{3}{2} t \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

$\ln \frac{5}{2}$ d'une fraction rationnelle dont décomposition en éléments simples

factorisons le polynôme du troisième degré $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$

$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2 - x + 1} = \frac{-x+2}{3(x^2 - x + 1)}$

soit $I_7 = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{-x+2}{x^2 - x + 1} \, dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{-x}{x^2 - x + 1} \, dx + \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 1} \, dx$

et $I_7 = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{-x}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \, dx = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{(2x-1) \frac{1}{2}}{\frac{4}{9} \left(\frac{2x-1}{3} \right)^2 + 1} \, dx$

on effectue le changement de variable $t = \frac{2x+1}{3}$ ou $x = \frac{\sqrt{3}t+1}{2}$ et $dx = \frac{\sqrt{3}}{2} dt$

$I_7 = \frac{2\sqrt{3}}{9} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \frac{t}{t^2 + 1} \, dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \frac{1}{t^2 + 1} \, dt + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \frac{t}{t^2 + 1} \, dt$

$I_7 = \frac{1}{6} \left[\ln(t^2 + 1) \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{3} \left[\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right] = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$

et finalement

$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$

Exercice 14 - Réponse

Ce sont des intégrales abéliennes de la forme

$$f(x) = \sqrt{x^3 + bx + c} \, dx \text{ avec } a = 0 \text{ et } \mathbb{R} \text{ fraction rationnelle}$$

$-2x^2 - x + 1 = 0 \implies x = -1 \text{ et } x^2 = \frac{1}{2} \implies \sqrt{-\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{4} \right] \cup \left[1 + \frac{9}{8} \right] \text{ et } I_{14} \text{ et } I_{15} \text{ existent d'après le signe}$

Effectuons la décomposition canonique du trinôme

$-2x^2 - x + 1 = -2 \left[x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right] = -2 \left[\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{17}{16} \right] = -2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{4x+1}{3} \right)^2 - 1 \right]$
$$I_{14} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{4x+1}{3} \right)^2}}$$

d'où le changement de variable $t = \frac{4x+1}{3}$ et $dt = \frac{4}{3} dx$

$I_{14} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\arcsin t \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{12}$

$I_{15} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{-x} \, dx = -x \, dx$

d'où le changement de variable

$$t = \arcsin \frac{4x+1}{3} \quad \text{ou} \quad \sin t = \frac{4x+1}{3}$$

et $\cos t \, dt = \frac{4}{3} dx$

$I_{15} = \frac{9}{8\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \cos^2 t \, dt = \frac{9\sqrt{2}}{32} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) \, dt = \frac{9\sqrt{2}}{32} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{32} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$

Exercice 15 - Réponse

La fonction log-arithmétique est transcendante et sa dérivée é tant algébrique, effectuons une intégration par parties, en posant

$u = \ln(1+x^2) \implies u' = \frac{2x}{1+x^2}$
 $v = x \implies v' = 1$

$I_{16} = \left[x \ln(1+x^2) \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$

Décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle (ne pas oublier la partie entière)

$\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$

$I_{16} = \ln 2 - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) \, dx = \ln 2 - 2 \left[x - \arctan x \right]_0^{\frac{1}{2}} = \ln 2 + \frac{\pi}{4} - 2$

$I_{17} = \int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \, dx$ (ou $\int_0^1 \operatorname{Argsh} x \, dx$)

on intègre par parties

$u = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \implies u' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
 $v = x \implies v' = 1$

$I_{17} = \left[x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx = \left[x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1$

Exercice 16 - Réponse

$$I_{18} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln(1 + \sin x) \, dx$$

On intègre par parties

$u = \ln(1 + \sin x) \implies u' = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$
 $v = -\cos x \implies v' = \sin x$

$A_6 = \left[-\cos x \ln(1 + \sin x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} \, dx$

puisque $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = (1 + \sin x)(1 - \sin x)$

$I_{18} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \, dx = \left[x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$

$I_{19} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(2x^2 - 2x + 5) \, dx$

Le trinôme du second degré $2x^2 - 2x + 5$ possède un $\Delta < 0$

On effectue la décomposition canonique de ce trinôme

$2 \left[x^2 - x + \frac{5}{2} \right] = 2 \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{9}{4} \right] = \frac{9}{2} \left[\frac{4}{9} \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + 1 \right]$

On effectue le changement de variable:

$t = \frac{2x-1}{3}$ ou $x = \frac{3t+1}{2} \implies dx = \frac{3}{2} dt$

si $x = \frac{1}{2}$ alors $t = 0$

$x = 2 \implies t = 1$

$I_{19} = \frac{9}{2} \int_0^1 \ln \left(\frac{4}{9} t^2 + 1 \right) \, dt = \ln \frac{9}{2} \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} \, dt + \int_0^1 \ln(1 + t^2) \, dt$

La dernière intégrale se calcule par parties

$I_{19} = \frac{3}{2} \ln \frac{9}{2} + \frac{3}{2} \left[t \ln(1 + t^2) - 2 \int_0^1 \frac{t^3}{1 + t^2} \, dt \right]$

soit $I_{19} = 3 \ln 3 - 3 + \frac{3\pi}{4}$

Exercice 17 - Réponse

D'après la règle de Biotche, il n'y a pas d'invariant, on pose $t = \tan \frac{x}{2}$

$I_{20} = 2 \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} \, dt = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \, dt = \frac{2}{3} \left[\arctan t \right]_0^1 = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$

$I_{21} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{1 + \sin^2 x} \, dx$

D'après la règle de Biotche, l'invariant est par exemple $(-x)$. On pose $t = \cos x$

D'après la règle de Biotche, l'invariant est par exemple $(-x)$. On pose $t = \cos x$

$I_{21} = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t} \right]_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{1}{4} \ln 7$

ou encore, l'invariant est $(x + \pi)$. On pose $t = \tan x$

$I_{21} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+t^2)^2} \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+t^2} \, dt = \frac{1}{4} \ln 7$

Exercice 18 - Réponse

$I_{22} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$

On applique la règle de Biotche, il n'y a aucun invariant

On effectue le changement de variable:

$t = \tan \frac{x}{2}$ ou $x = 2 \arctan t$ et $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$I_{22} = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \, dt = \frac{1}{4} \ln 7$

Décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle:

$\frac{1}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2}$

$I_{22} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \, dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \, dt = 0$

$I_{22} = \left[\ln(1+t) - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + \arctan t \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$

$I_{23} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos^2 x} \, dx$

On applique la règle de Biotche, l'invariant est $\pi - x$

On effectue le changement de variable $t = \sin x$ et $dt = \cos x \, dx$

$I_{23} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-t^2} \, dt = \frac{1}{4} \ln 7$

soit $I_{23} = \frac{1}{4} \ln 7$

Exercice 19 - Réponse

$I_{24} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{1 + \sin^2 x} \, dx$

L'invariant est $(\pi - x)$