

Sommes de Riemann



Exercice 1

Calculer :

$$I_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^2$$



Exercice 2

Calculer :

$$I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(k-1) \frac{\pi}{2n}$$



Exercice 3

Calculer :

$$I_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}$$



Exercice 4

Calculer :

$$I_4 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{p}{\sqrt{4n^2 - p^2}}$$



Exercice 5

Calculer :

$$I_5 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2}$$



Exercice 6

Calculer :

$$I_6 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{k^2 + n^2}$$



Exercice 7

Calculer :

$$I_7 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + (-1)^k k^2}}$$



Exercice 8

Démontrer
$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+n)^2}$$

En déduire
$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^2}$$



Exercice 9

Calculer :

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(e^{\frac{1}{n+k}} \right) - n$$



Exercice 10

Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln \frac{1}{\sqrt{k+n}} - n$$



Exercice 11

Déterminer :

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right)$$