Extrema - Réponses

Exercice 1 - Réponse

On a $z = x^3 - 3xy^2 + 12x - 12y$

• Recherche des points stationnaires

On cherche les éventuels points stationnaires

$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 12$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -6xy - 12$

et l'on résout le système

$\begin{cases} 3x^2 - y^2 + 12 = 0 \\ -6xy - 12 = 0 \end{cases}$

c'est-à-dire les points d'intersection du cercle (C) : $x^2 + y^2 = 5$

et de l'hyperbole équilatère (H) : $xy = -2$.

Il y a quatre points d'intersection : $M_1(2;-1)$, $M_2(1;2)$ et leurs symétriques par rapport au point O, $M_3(-2;1)$ et $M_4(-1;-2)$.

• Calcul des dérivées secondes

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -6y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6x$

• Etude des formes quadratiques en chacun des points d'intersection

$Q_{M_1}(h;k) = 12h^2 - 12hk - 12k^2$

$= 6\left[2h^2 - hk - 2k^2\right] = 6\left[\left(2h - \frac{1}{4}k\right)^2 - \frac{17}{16}k^2\right]$

La signature vaut $(2;0)$ et f admet un maximum en $(2;1)$.

et un maximum vaut $f(2;1) = 20$

$Q_{M_2}(h;k) = 12h^2 + 12hk + 12k^2$

$= 6\left[2h^2 + hk + 2k^2\right] = 6\left[\left(2h + \frac{1}{4}k\right)^2 + \frac{15}{16}k^2\right]$

La signature vaut $(2;0)$ et f admet un maximum en $(1;2)$

et un maximum vaut $f(1;2) = 20$

$Q_{M_3}(h;k) = -12h^2 + 12hk + 12k^2$

$= 6\left[-2h^2 + hk + 2k^2\right] = 6\left[-\left(2h - \frac{1}{4}k\right)^2 + \frac{17}{16}k^2\right]$

La signature vaut $(1;1)$ et f admet un col.

$Q_{M_4}(h;k) = -12h^2 - 12hk - 12k^2$

$= -6\left[2h^2 + hk + 2k^2\right] = -6\left[\left(2h + \frac{1}{4}k\right)^2 + \frac{15}{16}k^2\right]$

La signature vaut $(1;1)$ et f admet un col.

Exercice 2 - Réponse

On cherche les éventuels points stationnaires

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 20xy^2 + 4$

et $\frac{\partial f}{\partial y} = 20x^2y - 20y^3$

et l'on résout le système

$\begin{cases} 4x^3 + 20xy^2 + 4 = 0 \\ 20x^2y - 20y^3 = 0 \end{cases}$

La deuxième équation devient

$y(x - y)(x + y) = 0$

et est vraie si $y = 0$ ou $x = y$ ou $x = -y$

En reportant dans la première équation, on obtient

si $y = 0$: $x^3 = -1$ donc $x = -1$

si $x = y$: $9x^3 = -4$ donc $x = -\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

si $x = -y$: $9x^3 = -4$ donc $x = -\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

On obtient donc trois couples : $(-1;0)$, $\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{9}};-\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)$ et $\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{9}};\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)$ est les importe dans le système initial, on vérifie qu'ils conviennent tous les trois

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x^2 - 4rt \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 20xt - 20yt$

donc

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12rt + 20y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 20(rt - 3y^2)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 56xy$

Les points stationnaires sont $(1;0)$, $\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{9}};\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)$ et $\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{9}};-\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)$

On teste la forme quadratique en $(1;0)$, on est point

$Q_{(1;0)}(h;k) = 12h^2 + 20k^2$ la signature vaut $(2;0)$

et f admet un maximum en $(1;0)$. On teste maintenant $(0;0)$:

$Q_{(0;0)}(h;k) = 20k^2 + 20k^2 = 40k^2$ la discriminant est donc $(4k)^2 = 16.10$ est positif

la signature vaut $(1;1)$ et la fonction n'a pas d'extremum en $\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{9}};0\right)$

$Q_{\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{9}};0\right)}(h;k) = 20k^2 - 20hk - 16k^2$ le discriminant est donc $(16)^2 + 14.10$ est positif

la signature vaut $(1;1)$ et la fonction n'a pas d'extremum en $\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{9}};0\right)$

$Q_{\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{9}};-\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)}(h;k) = 20k^2 - 20hk - 16k^2$ le discriminant est donc $(16)^2 + 14.10$ est positif

la signature vaut $(1;1)$ et la fonction n'a pas d'extremum en $\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{9}};-\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)$

Exercice 3 - Réponse

Point stationnaire $(0;0)$, $(1;-2)$, $(-1;2)$

en point $(-1;2)$

$Q_{(-1;2)}(h;k) = 40h^2 + 16hk + 40k^2$

l'signature $(2;0)$ non-nulle en $(1;-2)$ et $f(1;-2) = -32$

Même résultat en $(-1;2)$ puisque $f(-h;-y) = f(h;y)$

en point $(0;0)$

$Q_{(0;0)}(h;k) = -60h^2 - 24hk + 8k^2)$

l'signature $(1;1)$ la forme quadratique ne permet pas de conclure sauf remarquons par la première factorisation $f(x;k) = 2A^2$ donc si restons des points assez proches de $(0;0)$ que l'on reste sur $f(x;k) = f(0;0) = 0$

mais l'on choisit $h = 0$ et $k^2 - 4k^2 = k^2 - 4k$ et cette expression est négative donc l'extremum $[-2;2]$ donc il existe des points aussi proches que l'on veut de $(0;0)$ tels que $f(x;0) < f(0;0) = 0$

ainsi la fonction f n'admet pas d'extremums en $(0;0)$

Exercice 4 - Réponse

Etudes les extrema de

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x;y;z) \mapsto x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$.

Cherchons les points singuliers de la fonction

$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3\left(x^2 - yz\right) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3\left(y^2 - xz\right) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3\left(z^2 - xy\right) = 0 \end{cases}$

Les points singuliers de la fonction sont $(0;0;0)$, $(1;1;1)$, $(-1;-1;1)$, $(-1;1;-1)$ et $(1;-1;-1)$

La forme quadratique de la fonction est

$Q(h;k;l) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}l^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}kl + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}hl$

Etude du point $(0;0;0)$

La forme quadratique est $Q_{(0;0;0)}(h;k;l) = 6h^2 + 6k^2 + 6l^2$

La signature est $s = (3;0)$

la fonction admet un maximum(donné) en point $(0;0;0)$. Ce maximum vaut $f(0;0;0) = 0$

Etude du point $(1;1;1)$

La forme quadratique est $Q_{(1;1;1)}(h;k;l) = 6h^2 + 6k^2 + 6l^2 - 6hk - 6kl - 6hl$

soit par exemple cet les d'aprés de Sylvester

$Q_{(1;1;1)}(h;k;l) = 3\left(h - k\right)^2 - 6\left(h + l\right)^2 - 6l = 3l^2$

la signature est $s = (2;1)$ pas d'extremum en $(1;1;1)$

Etude du point $(-1;-1;-1)$

La forme quadratique est $Q_{(-1;-1;-1)}(h;k;l) = 6h^2 + 6k^2 + 6l^2 + 6hk + 6kl + 6hl$

soit par exemple $Q_{(-1;-1;-1)}(h;k;l) = 3\left(h + k\right)^2 - 3\left(k + l\right)^2 - 3l = 3l^2$

la signature est $s = (2;1)$ pas d'extremum en $(1;1;1)$

Les points $(-1;1;-1)$ et $(1;-1;1)$ se déduisent du cas précédent par permutation circulaire

Exercice 5 - Réponse

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x;y) \mapsto \frac{x^2}{2} + xy + y$

• On commence par chercher les point s stationnaires

$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x + y = 0 \quad (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$