Déterminants - Réponses

Exercice 1 - Réponse

$L_2 + L_3 = (a+b+c)L_1$

$(L_1 + L_2 + L_3)$ est une famùille liée

$D = \det(L_1, L_2, L_3) = 0$

Exercice 2 - Réponse

Rappel :

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$

$2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$

$2\cos 2\theta - \cos\theta = \cos 3\theta$

$2\cos 3\theta \cos\theta - \cos 2\theta = \cos 4\theta$

$L_3 = 2\cos\theta L_2 - L_1$

(L_1, L_2, L_3) est une famille liée

$D = \det(L_1, L_2, L_3) = 0$

Exercice 3 - Réponse

$\Delta = \det(L_1, L_2, L_3) = \det(L_1, L_2 - L_1, L_3 - L_2)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ x+1 & x+1 & x+1 \\ x+2 & 2x+4 & 6x+12 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (x+1)(x+2)\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$\Delta = \det(C'_1, C'_2, C'_3) = \det(C'_1, C'_2 - C'_1, C'_3 - C'_1)$

$$\Delta = (x+1)(x+2)\begin{vmatrix} x+2 & x+1 & 2x+2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la deuxième ligne

$\Delta = -3(x+1)^2(x+2)$

Exercice 4 - Réponse

$\Delta = \det(C_1, C_2, C_3, C_4) = \det(C_1 + C_2 + C_3 + C_4, C_2, C_3, C_4)$

$$\Delta = (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & x & b & c \\ 1 & b & x & c \\ 1 & b & c & x \end{vmatrix}$$

$\Delta = (x+a+b+c)\det(C'_1, C'_2, C'_3, C'_4)$

$\Delta = (x+a+b+c)\det(C'_1, C'_2 - aC'_1, C'_3 - bC'_1, C'_4 - cC'_1)$

$$\Delta = (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-a & 0 & 0 \\ 1 & b-a & x-b & 0 \\ 1 & b-a & c-b & x-c \end{vmatrix} \quad \text{Déterminant triangulaire}$$

$\Delta = (x+a+b+c)(x-a)(x-b)(x-c)$

Exercice 5 - Réponse

$D = \det(C_1, C_2, C_3, C_4) = \det(C_1, C_2 - C_4, C_3 - C_4, C_4)$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -b & a-b & b \\ 1 & a-c & -c & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première ligne

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & -b & a-b \\ 1 & a-c & -c \\ 1 & b & c \end{vmatrix}$$

$D = \det(L'_1, L'_2 - L'_1, L'_3 - L'_1)$

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & -b & a-b \\ 0 & a+b-c & b-a-c \\ 0 & 2b & c+b-a \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première colonne

$$D = -\begin{vmatrix} a+b-c & b-a-c \\ 2b & c+b-a \end{vmatrix}$$

$D = -\left[(a+b-c)(c+b-a) - 2b(b-a-c)\right]$

$D = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$

Exercice 6 - Réponse

$D = \det(C_1, C_2, C_3) = \det((C_1, C_2 - C_1, C_3 - C_1)$

$$D = \begin{vmatrix} a+b & c-a & c-b \\ a^2+b^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2 \\ a^3+b^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix}$$

$D = \det(C'_1 - C'_2 + C'_3, C'_2, C'_3)$

$$D = \begin{vmatrix} 2a & c-a & c-b \\ 2a^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2 \\ 2a^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix}$$

$$D = 2a(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & c+a & c+b \\ a^2 & c^2+ac+a^2 & c^2+bc+b^2 \end{vmatrix}$$

$D = 2a(c-a)(c-b)\det(C''_1, C''_2 - C''_1, C''_3 - C''_2)$

$$D = 2a(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & c & b-a \\ a^2 & c(c+a) & (b-a)(a+b+c) \end{vmatrix}$$

$$D = 2a(c-a)(c-b)c(b-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c+a & a+b+c \end{vmatrix}$$

$D = 2abc(a-b)(b-c)(c-a)$

Exercice 7 - Réponse

$\Delta = \det(L_1, L_2, L_3) = \det(L_1, L_2, L_1 + L_2 + L_3)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \det(C'_1 - C'_3, C'_2 - C'_3, C'_3) = (a+b+c)\begin{vmatrix} -a-b-c & 0 & 2a \\ 0 & -b-a-c & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

et l'on obtient un déterminant triangulaire

$\Delta = (a+b+c)^3$

Exercice 8 - Réponse

Calculer le déterminant d'ordre n

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 0 & 1 & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & & \\ . & & & & . & & \\ . & & & & & 0 & \\ 1 & . & . & . & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On remplace L_1 par $L_1 - L_2$

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & 1 & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & & \\ . & & & & . & & \\ . & & & & & 0 & \\ 1 & . & . & . & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne

$\Delta_n = -\Delta_{n-1}$

et puisque $\Delta_1 = 1$

on obtient $\Delta_n = (-1)^{n-1}$

Exercice 9 - Réponse

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & x & 1 & . & . & . & . \\ 1 & 1 & x & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & x & & & \\ . & & & & . & & \\ . & & & & & x & \\ 1 & . & . & . & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

On remplace L_1 par $L_1 - L_2$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x-1 & 1-x & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 1 & x & 1 & 1 & . & . & 1 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & . & . & . & x \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première ligne

$\Delta_n = (x-1)\Delta_{n-1} + (x-1)D_{n-1}$

en posant

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & x & 1 & . & . & 1 \\ 1 & 1 & x & & & \\ & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

Calculons D_{n-1}. On remplace L_1 par $L_1 - L_2$

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1-x & 0 & . & . & 0 \\ 1 & x & 1 & . & . & 1 \\ 1 & 1 & x & & & \\ & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première ligne

$$D_{n-1} = (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & x & 1 & . & 1 \\ & & & & \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)D_{n-2}$$

et puisque $D_2 = (x-1)$ alors $D_{n-1} = (x-1)^{n-1}$

On a

$$\left|\begin{array}{l} \Delta_n = (x-1)\Delta_{n-1} + (x-1)^{n-1} \\ \Delta_{n-1} = (x-1)\Delta_{n-2} + (x-1)^{n-2} \\ \\ \Delta_2 = (x-1)\Delta_1 + (x-1) \end{array}\right.$$

En multipliant successivement par $(x-1), \ldots\ldots, (x-1)^{n-2}$

on obtient

$\Delta_n = (x-1)^{n-1}\Delta_1 + (x-1)^{n-1}$

et puisque $\Delta_1 = x$

alors

$\Delta_n = (x-1)^{n-1}(x+n-1)$

Exercice 10 - Réponse

$\Delta_1 = |0| = 0 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & & n-3 \\ & & & & \\ & & & & \\ n-1 & n-2 & n-3 & & 0 \end{vmatrix}$$

$\Delta_n = \det(C_1, C_2 - C_1, C_3 - C_2, \ldots, C_n - C_{n-1})$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & -1 & 1 & & 1 \\ 2 & -1 & -1 & & 1 \\ & & & & \\ & & & & \\ n-1 & -1 & -1 & & -1 \end{vmatrix}$$

$\Delta_n = \det(L_1, L_2 + L_1, L_3 + L_1, \ldots, L_n + L_1)$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 0 & 2 & & 2 \\ 2 & 0 & 0 & & 2 \\ & & & & \\ & & & & \\ n-1 & 0 & 0 & & 0 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière ligne

$$\Delta_n = (-1)^{n-1}(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ 0 & 2 & & 2 \\ & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & & 2 \end{vmatrix}$$

$\Delta_n = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$

Exercice 11 - Réponse

En utilisant les déterminants

$A^2 = -I_3 \Rightarrow \det(A^2) = \left[\det(A)\right]^2 = \det(-I_3) = -1$

ce qui est impossible

donc il n'existe pas de matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_3 = 0$