Cpp juin 2005

Etudier l'intégralité de la fonction f définie par la relation

$f(x)=\dfrac{x^3}{(x^4-4x^2+13)^2}$ sur l'intervalle $[\sqrt{2}\ ;+\infty[$ et le cas échéant expliciter la valeur de son intégrale

En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{(\tan x+2)\ \cos^2 x}{(\sin^2 x+9\cos^2 x)^2}\ dx$

Considérons la fonction rationnelle f définie par la relation

$$f(x)=\frac{x^3}{(x^4-4x^2+13)^2}$$

$f\in C^{\infty}(R)\ \wedge\ f(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x^5}$. Nous déduisons du critère de Riemann que

la folnction f est est intégrable sur l'intervalle $[\sqrt{2}\ ;+\infty[$. De plus $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} f(x)\ dx>0$

Exlicitons la valeur de $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} f(x)\ dx$

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{x^3}{(x^4-4x^2+13)^2}dx=\frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\frac{udu}{(u^2-4u+13)^2}=\frac{1}{2}\int_2^{+}\frac{udu}{[(u-2)^2+9]^2}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{v+2}{(v^2+9)^2}dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_{R^+}\frac{vdv}{(v^2+9)^2}+\int_{R^+}\frac{dv}{(v^2+9)^2}=\frac{1}{4}\int_{R^+}\frac{d(v^2+9)}{(v^2+9)^2}+\int_{R^+}\frac{dv}{(v^2+9)^2}=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{v^2+9}\right]_0^{+\infty}+\int_{R^+}\frac{dv}{(v^2+9)^2}$$

$$=\frac{1}{36}+\int_{R^+}\frac{dv}{(v^2+9)^2}$$

Or $\displaystyle\int_{R^+}\frac{dv}{v^2+9}=\frac{1}{3}\left[\mathrm{Arc}\ \tan\frac{v}{3}\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{6}=\left[\frac{v}{v^2+9}\right]_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}\frac{(v^2+9)-9}{(v^2+9)^2}\ dv$

$$=2\left[\frac{\pi}{6}-9\int_{R^+}\frac{dv}{(v^2+9)^2}\right]$$

soit $\displaystyle\int_{R^+}\frac{dv}{(v^2+9)^2}=\frac{1}{18}\ .\ \frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{108}$

donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^3dx}{(x^4-4x^2+13)^2}=\frac{1}{2}\int_{R^+}\frac{(v+2)}{(v^2+9)^2}\ dv=\frac{1}{108}(\pi+3)$$

Calculons la valeur de l' intégrale $\int_0^{\pi/2} \frac{(\tan x + 2)\cos^2 x}{(\sin^2 x + 9\cos^2 x)^2}\ dx$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(\tan x + 2)\cos^2 x}{(\sin^2 x + 9\cos^2 x)^2}\ dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan x + 2}{(\tan^2 x + 9)^2}\ \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_{R^+} \frac{(u+2)}{(u^2+9)^2}\ du$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(\tan x + 2)\cos^2 x}{(\sin^2 x + 9\cos^2 x)^2}\ dx = \frac{1}{54}(\pi + 3)$$