I. On considère l'équation différentielle

$$\operatorname{sh}x \; f'(x) + \operatorname{ch}x \; f(x) = 1$$

Résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$; $\mathbb{R}_-^*$; $\mathbb{R}^*$; puis sur $\mathbb{R}$

II. 1) Etudier sommairement la fonction g définie par la relation

$g(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$ sur $\mathbb{R}_+$. (Présenter uniquement le tableau des variations)

Etudier son intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$. Calculer éventuellement la valeur de son intégrale sur $\mathbb{R}_+$.

2) On considère la série $\sum \dfrac{1}{(2n+1)^2}$; étudier sa convergence.

Déduire le cas échéant de la question précédente un encadrement de sa somme.

3) Sachant que $\xi(2) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, déduire la valeur exacte de la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

III. On considère la fonction f définie par la relation $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sh}x}$

1) Déterminer la classe de f, étudier sa parité et son signe.

2) Déterminer la partie principale de f à $\mp\infty$; au point 0.

Démontrer que f admet au point 0 un développement limité à tout ordre; expliciter celui à l'ordre 5.

Conclure quant à l'étude de f au point 0.

Expliciter la fonction f'. Déterminer la partie principale de f' au point 0.

La fonction f admet elle un prolongement de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

4) Etudier les variations de la fonction f, en utilisant la fonction auxiliaire h définie par la relation $h(x) = x - \operatorname{th}x$.

Dresser le tableau des variations de f.

IV. 1) Etudier l'intégrabilité de la fonction f sur R_+.
Le cas échéant quel est le signe de son intégrale ?
2) Démontrer la relation:

$$\forall n \in N \quad \forall x \in R^* \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} 2xe^{-(2k+1)x} + f(x)e^{-(2(n+1)x}$$

(Partir de $\sum_{k=0}^{n} 2xe^{-(2k+1)x}$ puis se laisser porter par le calcul)

3) En déduire la relation:

$$\forall n \in N \quad \int_{R_+} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{R_+} 2xe^{-(2k+1)x}dx + \int_{R_+} f(x)e^{-2(n+1)x}dx$$

4)Expliciter: $\forall k \in N \quad \int_{R_+} 2xe^{-(2k+1)x}dx$

5) Etudier la convergence de la suite $n \to \int_{R_+} f(x)e^{-2(n+1)x}dx$

5) Conclusion.