I. Considérons l'équation différentielle :

$$\mathrm{shx}\ f'(x) + \mathrm{chx}\ f(x) = 1$$

Cette équation différentielle est une équation différentielle linéaire du premier ordre, elle admet des solutions sur chacun des deux intervalles R_-^* et R_+^*.

Or: $\forall x \in R_+^*$, $\mathrm{shx}\ f'(x) + \mathrm{chx}\ f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[f = 0 \vee \left(\forall x \in R_+^* \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{\mathrm{chx}}{\mathrm{shx}} \wedge f \neq 0 \right) \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[f = 0 \vee \left(f \neq 0 \ \exists \alpha \in R^* \quad \forall x \in R_+^* \quad \ln\left|\frac{f(x)}{\alpha}\right| = -\ln|\mathrm{shx}| \right) \right]$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in R \quad \forall x \in R_+^* \quad f(x) = \frac{\alpha}{\mathrm{shx}}$$

Donc $\forall x \in R_+^* \quad \mathrm{shx}\ f'(x) + \mathrm{chx}\ f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in R \quad \forall x \in R_+^* \quad f(x) = \frac{\alpha}{\mathrm{shx}}$$

Appliquons la méthode de "la variation de la constante" de Lagrange

Soit $\alpha \in C^1(R_+^*) \wedge \forall x \in R_+^* \quad f(x) = \dfrac{\alpha(x)}{\mathrm{shx}}$

Alors $\forall x \in R_+^* \quad \mathrm{shx}\ f'(x) + \mathrm{chx}\ f(x) = \mathrm{shx}\left[\dfrac{\alpha'(x)}{\mathrm{shx}} + \alpha(x)\dfrac{-\mathrm{chx}}{\mathrm{sh}^2 x}\right] + \mathrm{chx}\dfrac{\alpha(x)}{\mathrm{shx}} = \alpha'(x) = 1$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in R \quad \forall x \in R_+^* \quad \alpha(x) = x + \lambda$$

Donc $\forall x \in R_+^* \quad \mathrm{shx}\ f'(x) + \mathrm{chx}\ f(x) = 1 \Leftrightarrow \exists \beta \in R \quad \forall x \in R_+^* \quad f(x) = \dfrac{x+\beta}{\mathrm{shx}}$

De même $\forall x \in R_-^* \quad \mathrm{shx}\ f'(x) + \mathrm{chx}\ f(x) = 1 \Leftrightarrow \exists \alpha \in R \quad \forall x \in R_-^* \quad f(x) = \dfrac{x+\alpha}{\mathrm{shx}}$

et $\forall x \in R_-^* \quad \mathrm{shx}\ f'(x) + \mathrm{chx}\ f(x) = 1 \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in R^2 \begin{cases} \forall x \in R_-^* & f(x) = \dfrac{x+\alpha}{\mathrm{shx}} \\ \forall x \in R_+^* & f(x) = \dfrac{x+\beta}{\mathrm{shx}} \end{cases}$

Les ensembles de fonctions solutions de l'équation différentielle considérée sur les intervalles R_+^* , R_-^*, puis sur R^* sont respectivement deux droites affines, puis un plan affine.

Résolvons cette équation différentielle sur R

$$\forall x \in R^* \quad \frac{x+\alpha}{shx} \underset{0}{\sim} \frac{\alpha}{x} \wedge \frac{x}{shx} \underset{0}{=} \frac{x}{x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)} = 1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)$$

La fonction $x \to \frac{x}{shx}$ admet donc un prolongement continu et dérivable au point 0. Nous en déduisons

$$\forall x \in R \quad shx\ f'(x)+chx\ f(x)=1 \Leftrightarrow \forall x \in R \quad f(x)=\frac{x}{shx}$$

L'ensemble des fonctions solutions sur R de l'équation différentielle considérée est donc réduit à un point

II. Etudions sur R_+ la fonction g définie par la relation $g(x)=\frac{1}{(2x+1)^2}$

x	0		$+\infty$
g'	-4	-	0
g	1	$\searrow$	
			0

Montrons que g est intégrable sur R_+ et que $\int_{R_+} g(x)dx = \frac{1}{2}$

La fonction g est continue sur R_+, elle y est donc localement intégrable, de plus $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4x^2}$

Nous déduisons du critère de Riemann que g est intégrable sur R_+.

De plus $\int_{R_+} \frac{dx}{(2x+1)^2} = \left[-\frac{1}{2(2x+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$

2) Considérons la série $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$

$\frac{1}{(2n+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$; donc d'après le critère de Riemann cette série converge.

De plus, d'après le théorème "comparaison somme de séries et intégrales généralisées":

$$\sum_{n\in N^*}\frac{1}{(2n+1)^2}\le\int_{R_+}\frac{dx}{(2x+1)^2}\le\sum_{n\in N}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Or: $\sum_{n\in N}\frac{1}{(2n+1)^2}=1+\sum_{n\in N^*}\frac{1}{(2n+1)^2}>1$

Donc

$$\sum_{n\in N}\frac{1}{(2n+1)^2}\in\left]1\,;\,\frac{3}{2}\right]$$

Par ailleurs $\xi(2)=\sum_{n\in N^*}\frac{1}{n^2}=\sum_{n\in N^*}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n\in N}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{1}{4}\xi(2)+\sum_{n\in N}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$

$$\Rightarrow\sum_{n\in N}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\in\left]1\,;\,\frac{3}{2}\right]$$

III. Etude de la fonction f définie par la relation : $f(x)=\frac{x}{shx}$

La fonction f est de classe C^∞ sur R^*, paire et >0

$f(x)\underset{+\infty}{\sim}2xe^{-x}\Rightarrow f(x)\underset{\mp\infty}{\sim}2\,|x|\,e^{-|x|}$ et $f(x)\underset{0}{\sim}1$;

donc f admet un prolongement continue au point 0.

De plus la fonction $x\xrightarrow{\varphi}\frac{shx}{x}$ admet à tout ordre, au point 0, un développement limité polynumial vérifiant:

$\forall n\in N\quad \frac{shx}{x}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+1})$ de premier terme 1.

La fonction $f=\frac{1}{\varphi}$ admet donc à tout ordre au point 0, un développement limité polynomial. Explicitons celui à l'ordre 5.

$$f(x)\underset{0}{=}\frac{x}{x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)}$$

$$\Rightarrow f(x)\underset{0}{=}1-\frac{x^2}{6}+\frac{7}{360}x^4+o(x^5)$$

La fonction f admet donc au point 0 un prolongement continu et dérivable tel que : $f(0)=1 \vee f'(0)=0$

Or, $\forall x\in R^* \quad f'(x)=\frac{shx-xchx}{sh^2x}=-\frac{chx}{sh^2x}(x-thx)$

f' est impaire

$$\Rightarrow f'(x)\underset{0}{=}\frac{(x+\frac{x^3}{6}+o(x^4))-x(1+\frac{x^2}{2}+o(x^3))}{(x+o(x^2))^2}\underset{0}{\sim}-\frac{1}{3}x\xrightarrow[0]{}0=f'(0)$$

Le prolongement continu et dérivable de f au point 0 et donc au moins de classe C^1 sur R.

(La fonction f admet, même, un prolongement de classe C^∞ sur R)

x	-∞		0		+∞
f’	0	+	0	-	0
			1		
f	0				0

IV. Etude dê l'intégrabilité de f sur R_+, et explicitation de $\int_{R_+} f(x)dx$

La fonction f admet un prolongement continu sur R_+; elle y est donc localement intégrable; de plus $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2xe^{-x} \underset{+\infty}{=} o(e^{-\frac{x}{2}})$

La fonction f est donc intégrable sur R_+, et $\int_0^{+\infty} f(x)dx > 0$.

Cette intégrale ne peut être calculée par les procédés classiques; Montrons qu'elle est égale à la somme d'une série connue.
De plus:

$$\forall n \in N \quad \forall x \in R^* \quad \sum_{k=0}^{n} 2xe^{-(2k+1)x} = 2x\frac{e^{-x} - e^{-(2n+3)x}}{1-e^{-2x}} = 2x\frac{e^{-x}}{1-e^{-2x}} - 2x\frac{e^{-(2n+3)x}}{1-e^{-2x}}$$

$$\Rightarrow \forall n \in N \quad \forall x \in R^* \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} 2xe^{-(2k+1)x} + f(x)e^{-2(n+1)x}$$

(Vérifions cette relation pour $n = 0$:

$$\forall x \in R^* \quad f(x) = 2xe^{-x} + f(x)e^{-2x} \Leftrightarrow \forall x \in R^* \quad f(x) = \frac{2xe^{-x}}{1-e^{-2x}}$$

la dernière égalité est vraie)
Or chacune des $(n+3)$ fonctions intervenant dans cette égalité soit est continue sur R_+, soit admet un prolongement continu sur R_+.
De plus, f est intégrable sur R_+;

$$\forall k \in N \quad 2xe^{-(2k+1)x} \underset{+\infty}{=} o(e^{-\frac{x}{2}}) \quad \text{et} \quad f(x)e^{-2(n+1)x} \underset{+\infty}{=} o(e^{-2x})$$

Les $(n+3)$ fonctions intervenant dans cette égalité sont donc, chacune, intégrables sur R_+; Nous en déduisons:

$$\forall n \in N \quad \int_{R_+} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} 2\int_{R_+} xe^{-(2k+1)x}dx + \int_{R_+} f(x)e^{-2(n+1)x}dx$$

$$\text{Or } \forall k \in N \quad \int_{R_+} xe^{-(2k+1)x}dx = \left[-\frac{x}{2k+1}e^{(-2k+1)x}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2k+1}\int_{R_+} e^{-(2k+1)x}dx$$

$$= \left[-\frac{1}{(2k+1)^2}e^{-(2k+1)x}\right]_0^{+\infty}$$

$$\Rightarrow \forall k \in N \quad \int_{R_+} xe^{-(2k+1)x}dx = \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\text{et} \quad \forall n \in N \quad 0 < \int_{R_+} f(x)e^{-2(n+1)x}dx \le \operatorname{Max}_R |f| \int_{R_+} e^{-2(n+1)x}dx$$

$$\Rightarrow \forall n \in N \quad 0 < \int_{R_+} f(x)e^{-2(n+1)x}dx \le \frac{1}{2(n+1)}$$

Conclusion:

$$\forall n \in N \quad \int_{R_+} f(x)dx = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2n+1)^2} + \int_{R_+} f(x)e^{-2(n+1)x}dx$$

$$\wedge \int_{R_+} f(x)e^{-2(n+1)x}dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \wedge \sum_{n\in N} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\Rightarrow \text{Pour } n \to +\infty \quad \int_{R_+} \frac{x}{shx}dx = \frac{\pi^2}{4}$$

La valeur de l'intégrale de f sur R_+ est égale à la somme d'une série qui est explicitée; la valeur de cette intégrale ne pouvait être calculée ni par la méthode des primitives, ni par parties, ni par changement de variable.