1. *Etude de la fonction* f *définie par la relation* $f(x)=\dfrac{9}{(x+1)(x^2-x+1)^2}$

$f\in C^{\infty}\big(R-\{\,-1\,\}\big)\ ;\quad f<0\quad sur\ \ ]-\infty\,;\,-1\,[\quad\wedge\quad f>0\quad sur\ \ ]-1\,;\,+\infty\,[$

$f(x)\underset{\mp\infty}{\sim}\dfrac{9}{x^5}\quad\wedge\quad f(x)\underset{-1}{\sim}\dfrac{1}{x+1}$

$\forall x\in\ R-\{\,-1\,\}\qquad f\,'(x)=-9\ \dfrac{5x^2+x-1}{(x+1)^2(x^2-x+1)^3}$

$Or\quad\forall x\in\ R-\{\,-1\,\}\quad f\,'(x)=0\ \Leftrightarrow\ \left[\,x=\alpha=\dfrac{1}{10}(-1-\sqrt{21}\,)\ \vee\ x=\beta=\dfrac{1}{10}(-1+\sqrt{21}\,)\right]$

x	$-\infty$		-1			α		0		β		$+\infty$
f'	0	-	$-\infty$ ‖	‖ $-\infty$	-	0	+	9	+	0	-	0
f	0	↘	$-\infty$ ‖	‖ $+\infty$	↘	f(x)>0	↗	9	↗	f(β)	↘	0

2. *Décomposition de la fonction rationnelle* f *en éléments simples de* $R(X)$

$\exists\ (a;b;c;d;e)\in R^5\quad\forall x\in R-\{\,-1\,\}\qquad f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}+\dfrac{dx+e}{(x^2-x+1)^2}$

$a=\left[\dfrac{9}{(x^2-x+1)^2}\right]_{x=1}=1$

$[dx+e]_{x=-j}=-dj+e=\left[\dfrac{9}{x+1}\right]_{x=-j}=3(2+j)\Rightarrow[d=-3\ \wedge\ e=6\ ]$

$0=a+b\Rightarrow b=-1\ \wedge\ 9=a+c+e\Rightarrow c=2$

$Donc\ \ \forall x\in R-\{\,-1\,\}\quad f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x-2}{x^2-x+1}-3\dfrac{x-2}{(x^2-x+1)^2}$

3. *La fonction* f *est continue sur* $R-\{-1\}$; *elle admet donc des primitives sur chacun des deux intervalles* $]-\infty\,;\,-1\,[$ *et* $]-1\,;\,+\infty\,[$

Détermination des primitives de f:

$$\int\frac{dx}{x+1}=\ln|\ x+1\ |$$

$$\int\frac{x-2}{x^2-x+1}\ dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\left[\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx-3\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\ \ln(x^2-x+1)\ -\sqrt{3}\ \ Arc\tan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$$\int\frac{x-2}{(x^2-x+1)^2}dx=\frac{1}{2}\left[\int\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}dx-3\int\frac{1}{\left[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right]^2}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x^2-x+1}-3F_2(x)\right]\quad en\ \ posant\ \ F_2(x)=\int\frac{dx}{(x^2-x+1)^2}$$

Posons $F_1(x)=\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\ Arc\tan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

en primitivant par parties $F_1(x)=\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1}+2\displaystyle\int\frac{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}}{\left[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right]^2}\ dx$

$$\Rightarrow F_1(x)=\frac{1}{2}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1}+2\left[F_1(x)-\frac{3}{4}F_2(x)\right]$$

$$\Rightarrow F_2(x)=\frac{2}{3}F_1(x)+\frac{1}{3}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1}=\frac{1}{3}\left[\frac{4\sqrt{3}}{3}Arc\tan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right]$$

$$\int\frac{x-2}{(x^2+x+1)^2}dx=\frac{x}{x^2-x+1}-\frac{2\sqrt{3}}{3}Arc\tan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

Donc

$$\int\frac{9}{(x+1)(x^2-x+1)^2}dx=\ln|\ x+1\ |-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+3\sqrt{3}Arc\tan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{3x}{x^2-x+1}$$

II. *Etude de la fonction F définie par la relation* $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{9}{(t+1)(t^2-t+1)^2}dt$

Montrons que F est définie sur R_+^*

La fonction f est continue sur $R_+^*-\{-1\}$

Pour tout $x\in R_+^*$, *le segment* $\left[\frac{1}{x};x\right]$ *est inclus dans l'ouvert* $]-1;+\infty[$

la fonction f est donc intégrable sur ce segment ; F est donc définie au moins sur R_+^*

Pour tout $x\in R_-^*$, *le segment* $\left[\frac{1}{x};x\right]$ *contient le point* -1 , *or* $f(x)\underset{-1}{\sim}\frac{1}{x+1}$

La fonction f n'est donc pas intégrable sur un tel segment, ni au sens de Riemann, ni d'après le critère de Riemann, au sens de l'extension de la théorie de l'intégration de Riemann.

La fonction F n'est donc pas définie sur R_-^* , *de plus elle ne l est pas en* 0.

Donc le domaine de définition de la fonction F est R_+^*

Etudions le signe de la fonction F

$\forall t\in R_+ \quad f(t)>0$

$$\Rightarrow \quad \forall x\in\,]1,+\infty[\quad F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}f(t)dt>0 \ \wedge\ F(1)=\int_1^1 f(t)dt$$

$$\wedge \quad \forall x\in\,]0,1[\quad F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}f(t)dt<0$$

De plus $\forall x\in R_+^* \quad F(\frac{1}{x})=\int_x^{\frac{1}{x}}f(t)dt=-\int_{\frac{1}{x}}^{x}f(t)dt$

$$\Rightarrow \quad \forall x\in R_+^* \quad F(\frac{1}{x})=-F(x)$$

2. *Montrons que* $F\in C^\infty(R_+^*)$

La fonction f est continue sur $]-1;+\infty[$; *de plus*

les fonctions $x\to\frac{1}{x}$ *et* $x\to x$ *sont des involutions dérivables de* R_+^*

La fonction F est donc dérivable sur R_+^*

$$\forall x\in R_+^* \quad F'(x)=f(x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})=\frac{9}{(x+1)(x^2-x+1)^2}+\frac{9}{x^2(\frac{1}{x}+1)(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1)}=\frac{9(x^3+1)}{(x+1)(x^2-x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \forall x\in R_+^* \quad F'(x)=\frac{9}{x^2-x+1} \quad \Rightarrow F\in C^\infty(R_+^*)$$

3. *Explicitons la fonction F*

$$\forall x\in R_+^* \quad F(x)=\int_1^x F'(t)dt \Rightarrow \forall x\in R_+^* \quad \Rightarrow \quad F(x)=6\sqrt{3}Arc\tan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\pi\sqrt{3}$$

La fonction F admet donc un prolongement de classe C^∞ *sur R*

4. *Etudions la fonction F au point 0, à* $+\infty$, *et au point 1.*

La fonction F admet un prolongement de classe C^{∞} *sur* R; *elle admet donc au point 0, à tout ordre un développement limité de Taylor Lagrange.*

De plus: $F'(x) = \dfrac{9}{x^2 - x + 1} \underset{0}{=} 9(1 + x + o(x)) \Rightarrow F(x) = -2\pi\sqrt{3} + 9x + \dfrac{9}{2}x^2 + o(x^2)$

La fonction F vérifie la relation $\forall x \in R_+^* \quad F(x) = -F(\dfrac{1}{x})$

De l'étude au point 0, nous déduisons l'étude de F à $+\infty$; *la fonction F admet donc à* $+\infty$ *et à tout ordre un développement limité rationnel.*

De plus $F(x) \underset{+\infty}{=} 2\pi\sqrt{3} - \dfrac{9}{x} - \dfrac{9}{2x^2} + o(\dfrac{1}{x^2})$

De même F admet à tout ordre un développement de Taylor au point 1

$F'(1+h) = \dfrac{9}{h^2 + h + 1} \underset{0}{=} 9(1 - h + o(h)) \Rightarrow F(x) \underset{1}{=} 9(x-1) - \dfrac{9}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

5. *Etude des variations et de la convexité de la fonction F*

x	0		½		1	2	+∞
F”	9	+	0	-	-9	-	0
F’	9	+	12	+	9	+	0
F	$-2\Pi\sqrt{3}$		$-\Pi\sqrt{3}$		0	$\Pi\sqrt{3}$	$2\Pi\sqrt{3}$