CORRECTION

I. Etude de la fonction f définie par la relation : $f(x)=\dfrac{x}{shx}$

1. *Domaine : la fonction f est de classe C^{∞} sur R^*, paire et >0*
2. *Etude aux bornes*

a) étude au point 0. $f \xrightarrow[0]{} 1$

De plus, la fonction f admet à tout ordre au point 0 un développement limité polynomial obtenu en divisant 1 par la partie principale du développement limité à l'ordre n de $\dfrac{shx}{x}$ de premier terme 1.

Explicitons le développement de f au point 0 à l'ordre 5.

$$f(x)=\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}+o(x^5)}=1-\frac{x^2}{6}+\frac{7}{360}x^4+o(x^5)$$

La fonction f admet donc un prolongement continu et dérivable au point 0, tel que $f(0)=1$ et $f'(0)=0$

(il est possible de prouver que ce prolongement est holomorphe sur C)

b) étude à $\mp\infty$ $\quad f(x) \underset{\mp\infty}{\sim} 2\,|\,x\,|\,e^{-|x|}$

3. *étude de la fonction f'*

$$\forall x\in R^* \qquad f'(x)=\frac{shx-xchx}{sh^2x}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{x+\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)-x\left[1+\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)\right]}{x^2+o(x^3)} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{3}x$$

la fonction f' est donc continue sur R, donc $f\in C^1(R)$

la fonction f' est impaire et $f'(x) \underset{\mp\infty}{\sim} -2x\,e^{-|x|}$

la fonction f' est continue sur R_+ et dérivable sur R_+^*

de plus $f'(0)=0$ et $f' \xrightarrow[+\infty]{} 0$

Nous déduisons de l'extension du théorème de Rolle que:

$$\exists\alpha\in R_+^* \qquad f''(\alpha)=0$$

Or, f'' est paire; donc : $\exists\alpha\in R_+^*$: $f''(\alpha)=f''(-\alpha)=0$

(Une étude plus approfondie montre que ce point α est unique; et que aux points α et $-\alpha$, f présente une inflexion)

4. *Etude des variations de f*

$$\forall x\in R^* \qquad f'(x)=-\frac{chx}{sh^2x}[x-thx]$$

De l'étude de la fonction g définie par $g(x)=x-thx$, on déduit :

5. *Etude d'une bijection* :

La restriction de f *à* R_+ *est une application continue et strictement décroissante telle que* $f(0)=1$ *et* $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$

Donc f *définit une bijection de* R_+ *sur* $]\,0\ ,\ 1\,]$

Sa réciproque f^{-1} *est une bijection continue et strictement décroissante de* $]\,0\ ,\ 1\,]$ *sur* R_+ .

De plus f *est dérivable sur* 5. *Etude d'une bijection* :

La restriction de f *à* R_+ *est une application continue et strictement décroissante telle que* $f(0)=1$ *et* $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$

Donc f *définit une bijection de* R_+ *sur* $]\,0\ ,\ 1\,]$

Sa réciproque f^{-1} *est une bijection continue et strictement décroissante de* $]\,0\ ,\ 1\,]$ *sur* R_+ .

De plus f *est dérivable sur* R_+; f' *s'annule au point* 0, *et ne s'annule en aucun point de* R_+^*.

Donc f^{-1} *est dérivable sur* $]\,0\ ,\ 1\,[$, *mais ne l'est pas au point* 1.

II. Etude de la série $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$

1. *Etude de la fonction* h *définie par la relation* $h(x)=\frac{1}{(2x+1)^2}$

Etude de l'intégrabilité de h sur R_+

$$\left[h \in C(R_+) \quad et \quad h(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4x^2} \right] \Rightarrow h \ est \ intégrable \ sur \ (R_+)$$

$$De \ plus \ \int_{R_+} \frac{dx}{(2x+1)^2} = \left[-\frac{1}{2(2x+1)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

2. *Etude de la série* $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$

La série considérée converge d'après le critère de Riemann,

$$et \ \sigma = \sum_{n \in N} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

D'après le théorème de comparaison somme de séries et intégrales généralisées:

$$\sum_{n \in N^*} \frac{1}{(2n+1)^2} < \int_{R_+} \frac{dx}{(2x+1)^2} < \sum_{n \in N} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \Rightarrow \frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{2}$$

$$Or \ \sum_{n \in N} \frac{1}{(2n+1)^2} > 1 \quad Donc \ \sum_{n \in N} \frac{1}{(2n+1)^2} \in \left] 1 \, ; \, \frac{3}{2} \right[$$

$$De \ plus \ \ \xi(2) = \sum_{n \in N^*} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \in N^*} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n \in N} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\xi(2) + \sigma = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \in N} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

III. *Etude de l'intégrabilité de f sur* R_+

$$\left[f \in C(R_+) \ et \ f(x) \underset{+\infty}{\sim} 25x \ e^{-x} = o(e^{-\frac{x}{2}}) \right] \Rightarrow f \ est \ intégrable \ sur \ R_+$$

$$De \ plus \ \int_{R_+} f(x) \ dx \in R_+^*$$

$$Or : \forall n \in N \quad \forall x \in R_+^* \quad \sum_{k=0}^{n} 2xe^{-(2k+1)x} = \frac{2xe^{-x} - 2xe^{-(2n+3)x}}{1 - e^{-2x}}$$

$$\Rightarrow \forall n \in N \quad \forall x \in R_+^* \quad \frac{2xe^{-x}}{1-e^{-2x}} = \sum_{k=0}^{n} 2xe^{-(2k+1)x} + \frac{2xe^{-(2x+3)x}}{1-e^{-2x}}$$

$$\Rightarrow \forall n \in N \quad \forall x \in R_+^* \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} 2xe^{-(2k+1)x} + f(x)e^{-(2x+2)x}$$

Or, les $n+3$ *fonctions intervenant dans cette égalité sont chacunes continues sur* R_+ *et négligeable à* $+\infty$ *devant* $e^{-\frac{x}{2}}$, *et de ce fait intégrables sur* R_+.
Donc:

$$\forall n \in N \quad \int_{R_+} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} 2 \int_{R_+} x \; e^{-(2k+1)x}dx + \int_{R_+} f(x)e^{-2(n+1)x}dx$$

$$Or: \; \forall k \in N \quad \int_{R_+} x \; e^{-(2k+1)x}dx = \left[-\frac{x}{2k+1} e^{-(2k+1)x} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2k+1} \int_{R_+} e^{-(2k+1)x}dx = \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$Donc : \; \forall n \in N \quad \int_{R_+} f(x)dx = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} + \int_{R_+} f(x) \; e^{-2(n+1)x}dx$$

$$Or : \; \forall n \in N \quad 0 < \int_{R_+} f(x)e^{-2(n+1)x}dx < \int_{R_+} 1 \; e^{-2(n+1)x}dx < \frac{1}{2(n+1)}$$

$$Donc \quad \int_{R_+} f(x) \; e^{-2(n+1)x}dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_+$$

Toutes les suites intervenant dans l'égalité définissant $\int_{R_+} f(x)dx$ *étant convergentes, nous déduisons par passage à la limite pour* $n \to +\infty$ *que* ;

$$\int_{R_+} \frac{x}{shx} \; dx = \sum_{n\in N} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$