Etude de la fonction : $x \xrightarrow{f} \ln(x^4+1)$

I. 1. *La fonction* f *est de classe* C^{∞} *sur* R, *paire et positive.*

2. $f(x) \underset{\mp\infty}{\sim} \ln(x^4) \Rightarrow f(x) \underset{\mp\infty}{\sim} 4\ln|x|$

Montrons que f *admet à tout ordre un développement asymptotique au voisinage de* $\mp\infty$.

$\forall x \in R^* \quad f(x) = \ln\left[x^4(1+\frac{1}{x^4})\right] = \ln(x^4) + \ln(1+\frac{1}{x^4})$

Or la fonction $x \to \ln(1+x)$ *admet à tout ordre au point 0 un développement de Taylor Lagrange.*

Donc f *admet à tout ordre à* $\pm\infty$ *u~développement asymptotique, de partie principale* $4\ln|x|$, *dans l' échelle des fonctions* $(\frac{1}{x^n})_{n\in N}$

Explicitons celui à la précision $(\frac{1}{x^{15}})$

$$f(x) \underset{\mp\infty}{=} 4\ln|x| + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{2x^8} + \frac{1}{3x^{12}} + o(\frac{1}{x^{15}})$$

3. $f(x) \underset{0}{\sim} x^4$

De plus, $f \in C^{\infty}(R)$. *La fonction* f *admet donc en tout point de* R, *et à tout ordre un développement limité polynomial de Taylor Lagrange.*

En particulier ; $f(x) \underset{0}{=} x^4 - \frac{1}{2}x^8 + \frac{1}{3}x^{12} + o(x^{15})$

4. *Etude des variations de* f : $\forall x \in R \quad f'(x) = \frac{4x^3}{x^4+1}$

5. *Etude de la restriction de la fonction f à R_-*

La restriction de la fonction f à R_- est une application continue et strictement décroissante, admettant pour limite $+\infty$ à $-\infty$ et prenant la valeur 0 au point 0.
Donc, cette restriction définit une bijection de R_- sur R_+.
Sa réciproque est donc une bijection continue et strictement décroissante de R_+ sur R_-.
De plus, f est dérivable sur R_- ; la fonction f' ne s'annule en aucun point de R_-^* mais s'annule au point 0, tel que $f(0)=0$.
La fonction f^{-1} est donc dérivable sur R_-^*, mais ne l'est pas au point 0; de plus $(f^{-1})'(0)=-\infty$

II. Etude de l'intégrabilité de f sur le segment $[0\ ;\ 1]$.

1. *La fonction f est continue sur le segment* $[0\ ;\ 1]$; *elle y est donc intégrable et*:

$$0 < \int_0^1 f(x)dx < \ln 2$$

De plus, en intégrant par parties:

$$\int_0^1 \ln(x^4+1)dx = \left[x\ln(x^4+1)\right]_0^1 - 4\int_0^1 \frac{x^4}{x^4+1}\ dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \ln(x^4+1)\ dx = \ln 2 - 4 + 4\int_0^1 \frac{dx}{x^4+1}$$

Nous sommes ramenés au calcul de l'intégrale d'une fonction rationnelle.

Décomposition de $\frac{1}{X^4+1}$ *dans* $C(X)$ *puis dans* $R(X)$

$$\forall z \in C \quad z^4+1=0 \Leftrightarrow \exists k \in \{0;1;2;3\}\ :\ z=\omega_k = e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})}$$

$$\Rightarrow \exists(\alpha_k) \in C^4\ :\ \frac{1}{X^4+1} = \sum_{k=0}^{3} \frac{\alpha_k}{X-\omega_k}$$

$$\Rightarrow \forall k \in \{0;1;2;3\} \qquad \alpha_k = \frac{1}{4\,\omega_k^3} = \frac{\omega_k}{4\,\omega_k^4} = -\frac{1}{4}\,\omega_k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X^4+1} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\omega_0}{X-\omega_0} + \frac{\omega_1}{X-\omega_1} + \frac{\omega_2}{X-\omega} + \frac{\omega_3}{X-\omega_3}\right)$$

Puisque ω_0 *et* ω_3 *sont complexes conjugués ainsi que* ω_1 *et* ω_2

$$\Rightarrow \frac{1}{X^4+1} = -\frac{1}{4}\left[\frac{\omega_0(X-\omega_3)+\omega_3(X-\omega_0)}{(X-\omega_0)(X-\omega_3)} + \frac{\omega_1(X-\omega_2)+\omega_2(X-\omega_1)}{(X-\omega_1)(X-\omega_2)}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X^4+1} = -\frac{1}{4}\left(\frac{X\sqrt{2}-2}{X^2-X\sqrt{2}+1} + \frac{-X\sqrt{2}-2}{X^2+X\sqrt{2}+1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X^4+1} = \frac{1}{4}\left(\frac{X\sqrt{2}+2}{X^2+X\sqrt{2}+1} - \frac{X\sqrt{2}-2}{X^2-X\sqrt{2}+1}\right)$$

4. *Calcul de l'intégrale* $\int_0^1 \frac{dx}{x^4+1}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1 \left[\frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{2x-2\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right] dx$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1 \left[\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}} - \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}\right] dx$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right| + \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(Arc\tan\frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + Arc\tan\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + 2\Big(Arc\tan(\sqrt{2}+1) + \Big(Arc\tan(\sqrt{2}-1\Big) - (Arc\tan 1 + Arc\tan(-1))\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ln\frac{(2+\sqrt{2})^2}{2} + 2\ \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{8}\Big(\pi + \ln(3+2\sqrt{2})\Big)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \ln(x^4+1)dx = \ln 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(3+2\sqrt{2}) + \frac{\pi\sqrt{2}}{2} - 4$$

4. *La fonction* $x \xrightarrow{g} \cos x\ \ \ln(\sin^4 x+1)\ \ dx$

est continue et paire sur le segment $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

elle y est donc intégrable.

De plus : $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\ \ \ln(\sin^4 x+1)\ \ dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos x\ \ \ln(\sin^4 x+1)\ \ dx$

$$2\int_0^1 \ln(u^4+1)\ \ du$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\ \ \ln(\sin^4 x+1)\ \ dx = 2\ln 2 + \sqrt{2}\ln(3+2\sqrt{2}) + \pi\sqrt{2} - 8$$

5. *La fonction* $x \xrightarrow{g} \sin x\ \ \ln(\sin^4 x+1)\ \ dx$

est continue et impaire sur le segment $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

elle y est donc intégrable.

De plus : $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\ \ \ln(\sin^4 x+1)\ \ dx = 0$

6. *Pour tout* $n \in N$, *la fonction* $x \xrightarrow{\varphi_n} e^{inx} \ln(x^4+1)$ *est continue sur le segment* $[\ 0\ ;\ 1\ ]$; *elle y est donc intégrable. La suite* $\left(\int_0^1 e^{ix} \ln(x^4+1)dx\right)$ *est donc définie sur* N.

D'après le théorème de Gauss – Riemann – Lebesgue

$$\int_0^1 e^{ix} \ln(x^4+1)dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

car f *est intégrable sur* $[\ 0\ ;\ 1\ ]$.

III. Etude de la suite u *définie par* :

$$u_0 = 1 \quad \wedge \quad \forall n \in N \qquad u_{n+1} = \ln(u_n^4+1)$$

$f([\ 0\ ;\ 1\ ]) = [0\ ;\ \ln 2] \subset [\ 0\ ;\ 1\ ]$.

La fonction f *stabilise le segment* $[\ 0\ ;\ 1\ ]$.

Or, $u_0 = 1$;

la suite u *est définie sur* N, *et bornée prenant ses valeurs dans* $[\ 0\ ;\ 1\ ]$.

La fonction f *est strictement croissante sur le segment* $[\ 0\ ;\ 1\ ]$ *qu'elle stabilise*; *la suite* u *est donc monotone.*

Puisque $u_1 = \ln 2 < 1 = u_0$

la suite u *est donc strictement décroissante.*

La suite u *est bornée et strictement décroissante*; *donc d'après le théorème dê Dedeking, la suite* u *converge et admet une limite* $\lambda \in [\ 0\ ;\ \ln 2\ [$, *qui est solution de l'équation* $\lambda = \ln(\lambda^4+1)$

Or $\forall \lambda \in]\ 0\ ;\ 1\ [\quad) \quad 0 < \ln(\lambda^4+1) < \lambda^4 < \lambda < 1$

L'équation $\lambda = \ln(\lambda^4+1)$ *n'admet donc pas de solution sur* $]\ 0\ ;\ 1\ [$. *Donc* $u \to 0_+$

De plus, pour $n \to +\infty \qquad u_{n+1} = \ln(u_n^4+1) \underset{+\infty}{\sim} u_n^4$

Donc, pour $n \to +\infty \qquad \exists n_0 \in N \quad u_n \underset{+\infty}{\sim} u_{n_0}{}^{(4^{n-n_0})}$

La convergence de u *vers* 0 *est donc très rapide*

D'où $u_n \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{n!})$