*Considérons la fonction $f$ de $R$ dans $R$ définie par la relation* $f(x)=\ln(x^4+1)$

*I.* 1. *Déterminer le domaine de définition, et la classe de* $f$; *étudier sa parité et son signe.*

*Déterminer la partie principale de* $f$ *à* $\mp\infty$; *Démontrer que* $f$ *admet à tout ordre un développement asymptotique à* $\mp\infty$.

*Expliciter celui à la précision* $\dfrac{1}{x^{15}}$.

*Déterminer la partie principale de* $f$ *au point* 0;
*Démontrer que* $f$ *admet à tout ordre un développement polynomial au point* 0.

*Expliciter celui à la précision* $x^{15}$.

4. *Dresse le tableau des variations de* $f$.

5. *Démontrer que la restriction de* $f$ *à* $R_-$ *définit une bijection . Etudier la continuité , les variations, et la dérivabilité de la réciproque* $f^{-1}$. *Dresser le tableau des variations de* $f^{-1}$.

*II.* 1. *Etudier l'intégrabilité de la fonction* $f$ *sur le segment* $[\ 0\ ;\ 1\ ]$

*Déterminer un encadrement de* $\int_0^1 f(x)\ dx$

2. *Décomposer dans* $C(X)$ *puis dans* $R(X)$ *la gonction rationnelle* $\dfrac{1}{X^4+1}$ (*Controler la justesse de la décomposition*)

3. *Expliciter la valeur des intégrales* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^4+1}$ *et* $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$.

4. *Etudier l'intégrabilité de la fonction* $x \xrightarrow{g} \cos x \ln(\sin^4 x+1)$ *sur le segment* $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$. *Calculer éventuellement la valeur de son intégrale.*

5. *Etudier l'intégrabilité de la fonction* $x \xrightarrow{h} \sin x \ln(\sin^4 x+1)$ *sur le segment* $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$. *Calculer éventuellement la valeur de son intégrale.*

6. *On considère la suite* $(I_n)$ *définie par la relation:*

$$I_n = \int_0^1 e^{inx} \ \ln(x^4+1) \ dx$$

*Déterminer son domaine de définition. Etudier sa convergence.*
*Expliciter éventuellement sa limite.*

*III. On considère la suite u définie par la relation:*

$$u_0 = 1 \quad \wedge \quad \forall n \in N \qquad u_{n+1} = f(u_n) = \ln(u_n^4 + 1)$$

*Déterminer le domaine de définition de la suite u.*
*La suite u est elle bornée? Etudier les variations de u.*
*Etudier la convergence de u, expliciter éventuellement*
*sa limite. Etudier la vitesse de convergence de u.*