Cpp octobre 2004

$$\textit{Soit} \quad a \in R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in Z \right\}$$

$$\textit{Résoudre l'équation} \quad \frac{2\sin x + \sqrt{3}}{2\cos x + 1} = \tan a$$

$$\textit{Soit } f \textit{ la fonction définie par la relation } f(x) = \frac{2\sin x + \sqrt{3}}{2\cos x + 1}$$

$$\textit{Alors } f \in C^{\infty}\left(R - \left\{ \mp\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in Z \right\} \right)$$

$$\textit{De plus } \forall x \in R - \left\{ \mp\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in Z \right\}$$

$$f(x) = \frac{\sin x + \sin\frac{\pi}{3}}{\cos x + \cos\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sin\left[\frac{1}{2}(x+\frac{\pi}{3})\right]\cos\left[\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3})\right]}{2\cos\left[\frac{1}{2}(x+\frac{\pi}{3})\right]\cos\left[\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3})\right]} = \tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6})$$

$$\textit{Donc} : \forall x \in R - \left\{ \mp\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in Z \right\} \quad f(x) = \tan a \Leftrightarrow \tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}) = \tan a$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in Z : \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = a + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in Z : x = 2a - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

D'où

$$\forall a \in R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in Z \right\} \quad \forall x \in R - \left\{ \mp\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in Z \right\}$$

$$\frac{2\sin x + \sqrt{3}}{2\cos x + 1} = \tan a \Leftrightarrow \exists k \in Z : x = 2a - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$