Suites de Fibonnaci

Exercice 1

Considérons la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 0,\ u_1 = 1$, et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

1) Démontrer que la suite (u_n) est une suite de nombres entiers naturels définie sur $\mathbb{N}$

2) Démontrer que la suite (u_n) est strictement positive sur $\mathbb{N}^*$

3) Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$

4) Etudier la convergence de la suite (u_n), et déterminer éventuellement sa limite

5) Caractériser, et expliciter, la suite (w_n) définie par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad w_n = u_{n+1} \cdot u_{n-1} - u_n^2$$

6) Démontrer qu'il existe deux couples (α, β) de réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} - \alpha = \beta(u_{n+1} - \alpha\, u_n)$$

7) Expliciter la suite (u_n) de Fibonnaci, et en déduire sa partie principale

8) On considère désormais la suite (v_n) définie par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

a) Démontrer que (v_n) est une suite rationnelle

b) Etablir une relation de récurrence vérifiée par (v_n)

c) Etudier la convergence de la suite (v_n), et déterminer éventuellement sa limite

© Gérard Hirsch – http://maths54.free.fr