Algorithme de Heron d'Alexandrie

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$

1) Soit f la fonction définie par la relation : $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$

Etudier la fonction f. Représenter graphiquement f sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $a = 2$

Déterminer dans le cas général : $f([\sqrt{a} ; +\infty[)$

2) a) Démontrer que pour tout $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, la suite (u_n) est bien définie sur $\mathbb{N}$,

et minorée par $\sqrt{a}$ sur $\mathbb{N}^*$.

b) Démontrer que pour tout $a \in \mathbb{Q}_+^*$, et pour tout $u_0 \in \mathbb{Q}_+^*$, la suite (u_n) est

à valeurs rationnelles

c) A quelle condition nécéssaire et suffisante portant sur u_0 la suite (u_n) est elle constante ?

d) On suppose $u_0 \neq \sqrt{a}$. Etudier les variations de la suite (u_n)

3) a) On considère la suite (v_n) définie par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$$

Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Expliciter les suites (v_n) et (u_n)

b) On considère la suite (ε_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \sqrt{a}(1 + \varepsilon_n)$$

Exprimer ε_{n+1} en fonction de ε_n.