Suites de Fibonnaci - Réponse

Exercice 1 - Réponse

1) Montrons par récurrence que la suite (u_n) est une suite de nombres naturels définie sur $\mathbb{N}$

$$\left[u_0 \in \mathbb{N}, u_1 \in \mathbb{N} \wedge \forall n \in \mathbb{N} (\exists u_n \in \mathbb{N} \wedge \exists u_{n+1} \in \mathbb{N}) \Rightarrow \exists u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \in \mathbb{N}\right]$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \qquad \exists u_n \in \mathbb{N}$$

2) Montrons par récurrence que (u_n) est strictement positive sur $\mathbb{N}^*$

$$\left[u_1 = 1 \wedge u_2 = u_1 + u_0 = 1 \wedge \forall n \in \mathbb{N} (u_n \in \mathbb{N}^* \wedge u_{n+1} \in \mathbb{N}^*)\right] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n \in \mathbb{N}^*$$

3) Montrons que la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq 2 \quad u_{n+1} - u_n = u_{n-1} > 0$$

4) Montrons que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$, et ce par contraposition

$$\exists \lim_{n \to +\infty} u_n = \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (\exists \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lambda \wedge \lim_{n \to +\infty} u_{n+2} = \lambda)$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

Donc, le réel λ est solution de l'équation

$$\lambda = 2\lambda$$

D'où $\lambda = 0$

Or : $u_2 = 1$ et la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante

Donc $\lambda \geq 1$

On déduit donc de l'hypothèse de la suite de Fibonnaci est une assertion fausse

Donc, la suite (u_n) diverge

Puisque la suite extraite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante, la suite de Fibonnaci diverge vers $+\infty$