Algorithme de Heron d'Alexandrie - Réponse

Exercice 1 - Réponse

Algorithme de Héron d'Alexandrie :

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_0 \in \mathbb{R}_+^* \wedge \forall n \in \mathbb{N} \qquad U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + \frac{a}{U_n})$$

1) Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f_a(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$

f_a est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et impaire $\wedge$ $f_a'(x) = \frac{1}{2}(\frac{x^2 - a}{x^2})$

La fonction f_a est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, admet au point $\sqrt{a}$ un minimum absolu de valeur $\sqrt{a}$, et des limites à droite de 0 et à $+\infty$ égale à $+\infty$.

On en déduit que :

$$f_a(\mathbb{R}_+^*) = \left[\sqrt{a}\,; +\infty\right[\quad \wedge \quad f_a(\left[\sqrt{a}\,; +\infty\right[) = \left[\sqrt{a}\,; +\infty\right[$$

2) Représentation graphique des premiers termes de la suite (U_n)

D'après l'étude graphique, on peut conjecturer que pour tout n, la suite (U_n) est définie sur $\mathbb{N}$, décroissante sur $\mathbb{N}^*$, et converge rapidement vers $\sqrt{a}$.

a) Montrons par récurrence que la suite (U_n) est définie sur $\mathbb{N}$, et minorée par $\sqrt{a}$ sur $\mathbb{N}^*$ pour tout $U_0 \in \mathbb{R}_+^*$

Par démonstration antérieure $f_a(\mathbb{R}_+^*) = \left[\sqrt{a}\,; +\infty\right[\quad \wedge \quad f_a(\left[\sqrt{a}\,; +\infty\right[) = \left[\sqrt{a}\,; +\infty\right[$

$U_0 \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \exists U_1 = f_a(U_0) \in \left[\sqrt{a}\,; +\infty\right[$

$\wedge \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \left[\exists U_n \in \left[\sqrt{a}\,; +\infty\right[\Rightarrow \exists U_{n+1} = f_a(U_n) \in \left[\sqrt{a}\,; +\infty\right[\right]$

Donc : $\forall U_0 \in \mathbb{R}_+^* \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists U_n \in \left[\sqrt{a}\,; +\infty\right[$

b) Montrons par récurrence que pour tout $a \in \mathbb{Q}_+^*$, et pour tout $U_0 \in \mathbb{Q}_+^*$, la suite (U_n) est à valeurs rationnelles

$$a \in \mathbb{Q}_+^* \wedge U_0 \in \mathbb{Q}_+^* \wedge \forall n \in \mathbb{N} \left[U_n \in \mathbb{Q}_+^* \Rightarrow U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + \frac{a}{U_n}) \in \mathbb{Q}_+^*\right]$$

Donc : $(a \in \mathbb{Q}_+^* \wedge U_0 \in \mathbb{Q}_+^*) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \in \mathbb{Q}_+^*$

Remarque : ce résultat a un grand intéret pratique

c) Montrons que la suite (U_n) est constante si et seulement si $U_0 = \sqrt{a}$

La suite (U_n) est constante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = U_n$

$$\begin{aligned} \text{Or } U_{n+1} = U_n \quad \forall n \in \mathbb{N} &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = f_a(U_n) \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = \sqrt{a} \\ &\Leftrightarrow U_0 = \sqrt{a} \end{aligned}$$

Si la suite (U_n) est constante, alors nécessairement $U_0 = \sqrt{a}$

Réciproquement, montrons par récurrence que si $U_0 = \sqrt{a}$, alors la suite (U_n) est constante

$U_0 = \sqrt{a} \quad \wedge \quad \forall n \in \mathbb{N} \left[U_n = \sqrt{a} \Rightarrow U_{n+1} = f_a(\sqrt{a}) = \sqrt{a}\right]$

Donc $U_0 = \sqrt{a} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = \sqrt{a}$

En conclusion, la suite (U_n) est constante, si et seulement si, $U_0 = \sqrt{a}$

d) Soit $U_0 \in \mathbb{R}_+^* - \{\sqrt{a}\}$. Montrons que la suite (U_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_{n+1} - U_n = -\frac{U_n^2 - a}{U_n} < 0$$

e) Montrons que pour tout $U_0 \in \mathbb{R}_+^* - \{\sqrt{a}\}$, la suite (U_n) converge vers $\sqrt{a}$ par valeurs supérieures

Pour tout $U_0 \in \mathbb{R}_+^* - \{\sqrt{a}\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la suite (U_n) est strictement décroissante, et minorée par $\sqrt{a}$. Elle converge donc, et admet une limite λ, qui puisque la fonction f_a est continue sur $\mathbb{R}^*$, est solution de l'équation $\lambda = f_a(\lambda)$

Donc $\forall U_0 \in \mathbb{R}_+^* \qquad (U_n) \underset{+\infty}{\rightarrow} \sqrt{a}$

3) Explicitation de la suite (U_n), et étude de sa vitesse de convergence

a) On considère la suite (V_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad V_n = \frac{U_n - \sqrt{a}}{U_n + \sqrt{a}}$$

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad V_{n+1} = V_n^2$

$$\left[\forall n \in \mathbb{N} \quad V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - \sqrt{a}}{U_{n+1} + \sqrt{a}} \wedge U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + \frac{a}{U_n}) \wedge U_n = \sqrt{a}\,\frac{1 + V_n}{1 - V_n}\right]$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad V_{n+1} = V_n^2$

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = V_0^{2^n}$

$$V_0 = V_0^{2^0} \wedge \forall n \in \mathbb{N} \left[V_n = V_0^{2^n} \Rightarrow V_{n+1} = V_n^2 = V_0^{2^{n+1}}\right]$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = V_0^{2^n}$

Explicitons la suite (U_n) :

$$V_0 = \frac{U_0 - \sqrt{a}}{U_0 + \sqrt{a}} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = \sqrt{a}\,\frac{1 + \left(\frac{U_0 - \sqrt{a}}{U_0 + \sqrt{a}}\right)}{1 - \left(\frac{U_0 - \sqrt{a}}{U_0 + \sqrt{a}}\right)}$$

$$\text{Donc} \quad U_n \underset{+\infty}{=} \sqrt{a}\left[1 + 2\left(\frac{U_0 - \sqrt{a}}{U_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n} + o\left[\left(\frac{U_0 - \sqrt{a}}{U_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}\right]\right]$$

Remarque pour tout $U_0 \in \mathbb{R}_+^*$, la suite (U_n) converge donc très rapidement vers $\sqrt{a}$, et dans le cas général par valeurs périeures. Ceci est du au fait que $f_a'(\sqrt{a}) = 0$.

Un coup de génie de Héron et ce dès l'antiquité.