BARYCENTRE

Exercice 1

Rappel

G barycentre des points pondérés (A;a) et (B;b) avec $a+b\neq 0$

G est défini par $a\vec{GA}+b\vec{GB}=\vec{0}$ et $\vec{AG}=\dfrac{b}{a+b}\vec{AB}$

G est sur le segment $[AB]$ (G entre A et B) si les deux coefficients a et b sont de même signe

G est plus près de A que de B si $|a|>|b|$

pour tout point M du plan

si $a+b\neq 0$ alors $a\vec{MA}+b\vec{MB}=(a+b)\vec{MG}$

si $a+b=0$ alors $\vec{V}=a\vec{MA}+b\vec{MB}$ est un vecteur constant (c'est-à-dire indépendant du point M et $\vec{V}=a\vec{MA}+b\vec{MB}=b\vec{AB}=-a\vec{AB}$)

Introduisons le barycentre des points $(A,2)$ et $(B,-1)$

le barycentre G vérifie $2\,\vec{GA}-\vec{GB}=\vec{0}$

En utilisant la relation de Chasles pour les vecteurs

$$2\,\vec{GA}-(\vec{GA}+\vec{AB})=\vec{0} \quad \text{ou} \quad \vec{GA}=\vec{AB}$$

G est donc le symétrique de B par rapport à A

donc G est en O.

les deux coefficients 2 et -1 sont de signes contraires

donc le barycentre G est à l'extérieur du segment $[AB]$

G est du côté du point dont la valeur absolue des poids pondérés

est la plus grande puisque $2>|-1|$ donc du côté du point A et

à l'extérieur du segment $[AB]$

Introduisons le barycentre G

$$\left\|2\vec{MA}-\vec{MB}\right\|=\left\|2(\vec{MG}+\vec{GA})-(\vec{MG}+\vec{GB})\right\|=\left\|\vec{MG}+2\,\vec{GA}-\vec{GB}\right\|=\left\|\vec{MG}\right\|=L$$

donc M appartient au cercle de centre G (ou O) et de rayon L.

Exercice 2

Rappel : barycentre de 3 points

G barycentre des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$, (C,c) avec $a+b+c\neq 0$

G est défini par $a\,\vec{GA}+b\,\vec{GB}+c\,\vec{GC}=\vec{0}$

associativité

Si $a+b+c\neq 0$, on introduit le point H barycentre partiel de $(A;a)$, $(B;b)$ avec $a+b\neq 0$

alors le barycentre G est aussi le barycentre de $(H;a+b)$, $(C;c)$

De plus pour tout point M du plan

si $a+b+c\neq 0$ alors $a\,\vec{MA}+b\,\vec{MB}+c\vec{MC}=(a+b+c)\,\vec{MG}$

si $a+b=0$ alors $\vec{V}=a\,\vec{MA}+b\,\vec{MB}+c\,\vec{MC}$ est un vecteur constant (c'est-à-dire indépendant du point M)

1. le point G vérifie l'égalité vectorielle $\vec{GA}+\vec{GB}+2\vec{GC}=\vec{0}$
Le barycentre partiel H des points pondérés $(A;1),(B;1)$ est
le milieu du segment $[AB]$ puisque les 2 coefficients sont égaux.
Le barycentre G des points pondérés $(A;1),(B;1),(C;2)$ est grâce à
l'associativité le barycentre des points pondérés $(H;2),(C;2)$ c'est
donc le milieu G du segment $[CH]$.

2. Utilisons la relation de Chasles pour les vecteurs

$$\left\|\vec{MA}+\vec{MB}+2\vec{MC}\right\| = \left\|(\vec{MG}+\vec{GA})+(\vec{MG}+\vec{GB})+2(\vec{MG}+\vec{GC})\right\|$$

$$= \left\|4\vec{MG}+(\vec{GA}+\vec{GB}+2\vec{GC})\right\| = 4\left\|\vec{MG}\right\| = 1$$

ou encore $MG=\frac{1}{4}$

Le point M $\in$ au cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{4}$.

Exercice 3

Rappel
G barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ avec $a+b\neq 0$
G est défini par $a\vec{GA}+b\vec{GB}=\vec{0}$ et $\vec{AG}=\frac{b}{a+b}\vec{AB}$
G est sur le segment $[AB]$ (G entre A et B) si les deux coefficients a et b sont de même signe
G est plus près de A que de B si $|a|>|b|$

1. $AB=8$
G barycentre des points pondérés $(A;5)$ et $(B;3)$
G est défini par $5\vec{GA}+3\vec{GB}=\vec{0}$
En utilisant la relation de Chasles pour les vecteurs
$5\vec{GA}+3(\vec{GA}+\vec{AB})=\vec{0}$ ou $8\vec{GA}+3\vec{AB}=\vec{0}$
soit $8\vec{AG}=3\vec{AB}$ ou $\vec{AG}=\frac{3}{8}\vec{AB}$
G est sur le segment $[AB]$ tel que $AG=3$

2. H barycentre des points pondérés $(A;11)$ et $(B;-3)$

H est défini par $11\vec{HA} - 3\vec{HB} = \vec{0}$

et $\vec{AH} = \frac{-3}{8}\vec{AB}$

H est à l'extérieur du segment $[AB]$ puisque les deux coefficients

$a = 11$ et $b = -3$ sont de signes contraires

H est plus près de A que de B car $|a| = 11 > |b| = |-3| = 3$

puisque $AH = 3$ alors A est le milieu de GH

3. $\vec{u} = 5\vec{MA} + 3\vec{MB}$

utilisons encore la relation de Chasles

$\vec{u} = 5(\vec{MG} + \vec{GA}) + 3(\vec{MG} + \vec{GB}) = 8\vec{MG} + 5\vec{GA} + 3\vec{GB} = 8\vec{MG}$

puisque par définition $5\vec{GA} + 3\vec{GB} = \vec{0}$

$\vec{u} = 5\vec{MA} + 3\vec{MB} = 8\vec{MG}$ signifie bien que $\vec{u} = 5\vec{MA} + 3\vec{MB}$ est colinéire à $\vec{MG}$

De même

$\vec{v} = 11\vec{MA} - 3\vec{MB} = 11(\vec{MH} + \vec{HA}) - 3(\vec{MH} + \vec{HB}) = 8\vec{MH} + 11\vec{HA} - 3\vec{HB} = 8\vec{MH}$

$\vec{v} = 11\vec{MA} - 3\vec{MB} = 8\vec{MH}$ signifie bien que $\vec{v} = 11\vec{MA} - 3\vec{MB}$ est colinéire à $\vec{MH}$

4. Déterminer l'ensemble E_1 des points M du plan vérifiant

$$\left\|5\vec{MA} + 3\vec{MB}\right\| = \left\|11\vec{MA} - 3\vec{MB}\right\| \Leftrightarrow 8\left\|\vec{MG}\right\| = 8\left\|\vec{MH}\right\|$$

L'ensemble E_1 est la médiatrice du segment $[GH]$ donc la perpendiculaire à AB passant par A

5. Déterminer l'ensemble E_2 des points M du plan vérifiant

$(5\vec{MA} + 3\vec{MB}).(11\vec{MA} - 3\vec{MB}) = 0$

ou encore $8\vec{MG} \, . \, 8\vec{MH} = 0$ soit $\vec{MG} \, . \, \vec{MH} = 0$

le point M est sur le cercle de diamètre GH donc

sur le cercle de centre A et de rayon 3.

Exercice 4

Pour tout point M du plan, on pose

$\vec{V} = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$

1. Il n'existe pas de barycentre pour le triplet $(A,2),(B,-1),(C,-1)$
puisque la somme des coefficients est nulle

$\vec{V} = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$

le point G est le centre de gravité ou isobarycentre du triangle ABC alors $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC} = \vec{0}$

$\vec{V} = 2(\vec{MG}+\vec{GA}) - (\vec{MG}+\vec{GG}) - (\vec{MG}+\vec{GC}) = 2\vec{GA} - (\vec{GB}+\vec{GC}) = 2\vec{GA} - (-\vec{GA}) = 3\vec{GA}$

expression ne dépendant pas du point M donc $\vec{V}$ est un vecteur indépendant du point M.

2. $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC} = (\vec{MG}+\vec{GA}) + (\vec{MG}+\vec{GB}) + (\vec{MG}+\vec{GC}) = 3\vec{MG}$
et

$2\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MC} = 3\vec{GA}$

$\left\|\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}\right\| = \left\|2\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MC}\right\| \Leftrightarrow 3\left\|\vec{MG}\right\| = 3\left\|\vec{GA}\right\| \left\|\vec{MG}\right\| = \left\|\vec{GA}\right\|$

l'ensemble des points M de E tel que $\left\|\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}\right\| = \left\|2\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MC}\right\| \Leftrightarrow GM = GA$

est le cercle de centre G et de rayon GA (ce cercle de centre G passe par A).

Exercice 5

1. il n'y a pas de barycentre pour les points pondérés $(A;1),(B;1)$ et $(C;-2)$ puisque la somme des coefficients $(1+1-2=0)$ est nulle.

Ecrivons la relation de Chasles pour $\vec{MB}$ et $\vec{MC}$ en introduisant le point A.

$\vec{u}(M)=\vec{MA}+\vec{MB}-2\vec{MC}=\vec{MA}+(\vec{MA}+\vec{AB})-2(\vec{MA}+\vec{AC})=\vec{AB}-2\vec{AC}$

$\vec{u}(M)=\vec{AB}-2\vec{AC}$ est indépendant dê M donc $\vec{u}(M)$ est un vecteur constant.

2. Puisque $\vec{u}(M)=\vec{MA}+\vec{MB}-2\vec{MC}$ est un vecteur constant

alors $\vec{u}(M)=\vec{u}(A)=\vec{u}(B)=\vec{u}(C)$

soit $\vec{AB}-2\vec{AC}=\vec{BA}-2\vec{BC}=\vec{CA}+\vec{CB}$

Exercice 6

1. H barycentre de $(A,1)$ et $(B,3)$ alors $\vec{HA}+3\vec{HB}=\vec{0}$

soit en utilisant la relation de Chasles $\vec{HA}+3(\vec{HA}+\vec{AB})=\vec{0}$

ou $4\vec{HA}+3\vec{AB}=\vec{0}$ soit $\vec{AH}=\dfrac{3}{4}\vec{AB}$

H est donc affecté du poids pondéré 4.

2. G barycentre de $(H,4)$ et $(C,5)$ alors $4\vec{GH}+5\vec{GC}=\vec{0}$

soit en utilisant la relation de Chasles $4\vec{GH}+4(\vec{GH}+\vec{HC})=\vec{0}$

ou $9\vec{GH}+5\vec{HC}=\vec{0}$ soit $\vec{HG}=\dfrac{5}{9}\vec{HC}$

3. Calculons $\vec{GA}+3\vec{GB}=(\vec{GH}+\vec{HA})+3(\vec{GH}+\vec{HB})=4\vec{GH}+\vec{HA}+3\vec{HB}=4\vec{GH}$

puisque $\vec{HA}+3\vec{HB}=\vec{0}$ (d'après 1)

et donc G est colinéaire à $\vec{GH}$

$\vec{GA}+3\vec{GB}+5\vec{GC}=4\vec{GH}+5\vec{GC}=\vec{0}$

puisque $4\vec{GH}+5\vec{GC}=\vec{0}$ (d'après 2)

G est le barycentre de $(A,1),(B,3)$ et $(C,5)$

Rappel: associativité pour la construction du barycentre

Soit G le barycentre de $(A,a),(B;b),(C,c)$ avec $a+b+c\neq 0$

Si $a+b\neq 0$, en notant H le barycentre de $(A,a),(B,b)$ alors

G est le barycentre de $(H,a+b),(C,c)$

4. G est le barycentre de $(A,1),(B,3)$ et $(C,5)$

Grace à l'unicité et l'associativité du barycentre,

on construit H barycentre partiel de $(A,1)$ et $(B,3)$

H est alors affécté du coefficient $1+3=4$

et G est le barycentre de $(H,4)$ et $(C,5)$

De même K barycentre partiel de $(A,1)$ et $(C,5)$

G est alors affécté du coefficient $1+5=6$

donc G est aussi le barycentre de $(B,3)$ et $(K,6)$

Remarque:

Si L est le barycentre partiel de $(B,3),(C,5)$

alors les droites (CH), (BK), (AL) sont concourantes au point G

Exercice 7

Rappel

G barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ avec $a+b\neq 0$

G est défini par $a\vec{GA}+b\vec{GB}=\vec{0}$ et $\vec{AG}=\dfrac{b}{a+b}\vec{AB}$

G est sur le segment $[AB]$ (G entre A et B) si les deux coefficients a et b sont de même signe

G est plus près de A que de B si $|a|>|b|$

De plus

G barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ avec $a+b\neq 0$

Commutativité

G barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$

et G est aussi barycentre des points pondérés $(B;b)$ et $(A;a)$

Homogénéité

Pour tout réel k non nul

G barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$

et G est aussi barycentre des points pondérés $(A;ka)$ et $(B;kb)$

1. Soit H tel que $\vec{BH}=\dfrac{1}{3}\vec{BC}$ et H barycentre de $(B,b),(C,c)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=1 \end{cases}$

donc H barycentre de $(B,2),(C,1)$ mais aussi grâce à la propriété d'homogénéité H barycentre de $(B,4),(C,2)$

2. le point G est le barycentre des points pondérés $(A,3)$, $(B,4)$ et $(C,2)$.

et H le point soit le barycentre de $(B,4)$ et $(C,2)$.

alors G est le ßarycentre de $(A,3)$ et $(H,6)$ et les points A, G et H sont alignés.

de plus $\vec{AG}=\dfrac{6}{9}\vec{AH}=\dfrac{2}{3}\vec{AH}$

3. Déterminer l'ensemble $E = \left\{ M \in P \,\middle|\, \vec{u} = 3\vec{MA} + 2\vec{MB} + 4\vec{MC} \text{ soit colinéaire à } \vec{AB} \right\}$.

$\vec{u} = 3(\vec{MG} + \vec{GA}) + 2(\vec{MG} + \vec{GB}) + 4(\vec{MG} + \vec{GC})$

$= 9\vec{MG} + 3\vec{GA} + 2\vec{GB} + 4\vec{GC} = 9\vec{MG}$

$\vec{u} = 9\vec{MG}$ colinéaire à $\vec{AB} \Leftrightarrow M \in E$: droite parallèle à la droite (AB) et passant par le point G.

Exercice 8

Rappel

G barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ avec $a + b \neq 0$

G est défini par $a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{0}$ et $\vec{AG} = \dfrac{b}{a+b}\vec{AB}$

G est sur le segment $[AB]$ (G entre A et B) si les deux coefficients a et b sont de même signe

G est plus près de A que de B si $|a| > |b|$

1. Si $\vec{CJ} = \dfrac{3}{4}\vec{CA}$ alors $\begin{cases} b = 3 \\ a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$

et J est le barycentre de (C,1) et (A,3)

Si $\vec{AK} = \dfrac{2}{5}\vec{AB}$ alors $\begin{cases} b = 2 \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$

et K est le barycentre de (A,3) et (B,2)

2. Trois points non alignés A,B et C

Soit G le barycentre de (A,3),(B,2) et (C,1)

en utilisant l'associativité du barycentre

si I est le barycentre de (B,2), (C,1) le point G est sur la droite (AI)

si J est le barycentre de (C,1), (A,3) le point G est sur la droite (BJ)

si K est le barycentre de (A,3), (B,2) le point G est sur la droite (CK)

et

les droites (AI), (BJ) et (C,K) sont concourantes au point G barycentre de (A,3),(B,2) et (C,1)

Exercice 9

1. Le système $\{(A,-1);(B,1);(C,1);(D,-1)\}$ n'admet pas de barycentre puisque la somme des coefficients $-1+1+1-1=0$

2. Soit $\vec{V}=\vec{MB}-\vec{MA}+\vec{MC}-\vec{MD}$

$\vec{V}=(\vec{MA}+\vec{AB})-\vec{MA}+(\vec{MA}+\vec{AC})-(\vec{MA}+\vec{AD})$

$\vec{V}=\vec{AB}+\vec{AC}-\vec{AD}=\vec{AB}+(\vec{AB}+\vec{BC})-\vec{AD}=2\vec{AB}+\vec{BC}-\vec{AD}$

$\vec{V}=2\vec{AB}$ car $\vec{BC}-\vec{AD}=\vec{0}$ puisque ABCD est un carré.

3. le point G est le barycentre des points pondérés $\{(B,1);(C,-4);(D,1)\}$
la somme des coefficients est différente de 0 donc le barycentre G existe

et vérifie $\vec{GB}-4\vec{GC}+\vec{GD}=\vec{0}$

soit $(\vec{GO}+\vec{OB})-4(\vec{GO}+\vec{OC})+(\vec{GO}+\vec{OD})=\vec{0}$

$-2\vec{GO}+(\vec{OB}+\vec{OD})-4\vec{OC}=\vec{0}$
puisque

$\vec{OB}+\vec{OD}=\vec{0}$ car O est le milieu de $[BD]$

et $\vec{OG}=2\vec{OC}$
donc G est le symétrique de O par rapport à C.

4. Construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\|\vec{MB}-4\vec{MC}+\vec{MD}\right\|=\left\|\vec{MB}-\vec{MA}+\vec{MC}-\vec{MD}\right\|$$

$\vec{MB}-4\vec{MC}+\vec{MD}=-2\vec{MG}$ et $\vec{V}=\vec{MB}-\vec{MA}+\vec{MC}-\vec{MD}=2\vec{AB}$
soit $MG=AB$
et $M\in$ au cercle de centre G et de rayon $AB=4$.

Exercice 10

Soit ABCD un rectangle tel que $AB = 6$ et $BC = 10$

1. le barycentre G des points pondérés $(A,1)$, $(B,2)$, $(C,3)$ et $(D,6)$ existe car $1+2+3+6=12$

Soit H barycentre partiel de $(A,1)$, $(B,2)$ alors $\vec{AH} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ donc $AH = 4$

K barycentre partiel de $(H,3)$, $(C,3)$ alors K est le milieu de HC

G barycentre de $(K,6)$, $(D,6)$ alors G est le milieu de DK

On a aussi dans le repère orthonormé direct $(A;\vec{AD},\vec{AB})$

$$x_G = \frac{x_A + 2x_B + 3x_C + 6x_D}{1+2+3+6} = \frac{30+60}{12} = \frac{15}{2}$$

$$y_G = \frac{y_A + 2y_B + 3y_C + 6y_D}{1+2+3+6} = \frac{12+18}{12} = \frac{5}{2}$$

2. Déterminer l'ensemble $E = \left\{M \in \text{plan} \,\middle|\, \left\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} + 6\vec{MD}\right\| = 3\right\}$.

$$\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} + 6\vec{MD} = (\vec{MG}+\vec{GA}) + 2(\vec{MG}+\vec{GB}) + 3(\vec{MG}+\vec{GC}) + 6(\vec{MG}+\vec{GD})$$

$$= 12\ \vec{MG} + \vec{GA} + 2\vec{GB} + 3\vec{GC} + 6\vec{GD} = 12\ \vec{MG}$$

E est donc défini par $\left\|12\,\vec{MG}\right\| = 3$ soit $MG = \frac{1}{4}$

M $\in$ au cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{4}$.

Exercice 11

1. Soit G barycentre de (A,1), (B,1) et (C,2).
On cherche donc le point G appartenant au plan ABC tel que:

$$\vec{GA}+\vec{GB}+2\vec{GC}=\vec{0} \qquad (1)$$

On cherche d'abord le barycentre des points (A,1) et (B,1). Les deux coefficients étant égaux donc le barycentre I de ces deux points est le milieu de $[AB]$ et il est affecté du coefficient égal à la somme des coefficients, donc I est affecté du coefficient 2.
Puis, on cherche le barycentre des points (I,2) et (C,2). Le barycentre G est donc le milieu de $[CI]$ et G est affécté du coefficient 4 et de plus G appartient à la droite (CI)

2. Ecrivons la relation de Chasles pour les vecteurs en introduisant le point G

$$\left\|\vec{MA}+\vec{MB}+2\vec{MC}\right\|=\left\|(\vec{MG}+\vec{GA})+(\vec{MG}+\vec{GB})+2(\vec{MG}+\vec{GC})\right\|=\left\|4\vec{MG}+(\vec{GA}+\vec{GB}+2\vec{GC})\right\|=4\left\|\vec{MG}\right\|$$

en tenant compte de la relation (1)

$$\left\|\vec{MA}+\vec{MB}+2\vec{MC}\right\|=AB\Leftrightarrow 4\left\|\vec{MG}\right\|=4MG=AB$$

et E est le cercle de centre G et de rayon $\dfrac{AB}{4}$

3. Rappel: si H est le barycentre des points (A,a) et (C,b)

alors $\vec{AH}=\dfrac{b}{a+b}\vec{AC}$

Si H est tel que $\vec{AH}=\dfrac{2}{3}\vec{AC}$ alors $\begin{cases}b=2\\a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$

donc H est le barycentre de (A,1) et (C,2)
Puisque G est le barycentre de (A,1),(B,1) et (C,2), en tenant compte de l'associativité du barycentre, G est aussi le barycentre de (H,3) et (B,1) et G appartient à la droite (BH)
et donc les points B,G et H sont alignés.

Exercice 12

Rappel

G barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ avec $a+b\neq 0$

G est défini par $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ et on déduit alors $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

G est affecté du coefficient de pondération $a+b$

Soit les deux systèmes de points pondérés:

$S_1=\{(A,-2);(B,1)\}$ et $S_2=\{(A,3);(C,1)\}$

1. Le système S_1 admet un barycentre G_1 puisque la somme des coefficients pondérés $-2+1=-1\neq 0$

G_1 vérifie $-2\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{G_1B}=\overrightarrow{0}$ et donc $\overrightarrow{AG_1}=-\overrightarrow{AB}$

G_1 est le symétrique de B par rapport à A.

Le système S_2 admet un barycentre G_2 puisque la somme des coefficients pondérés $3+1=4\neq 0$

G_2 vérifie $3\overrightarrow{G_2A}+\overrightarrow{G_2C}=\overrightarrow{0}$ et donc $\overrightarrow{AG_2}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

2. Soit G l'isobarycentre des points A, B et C.

G est le barycentre de $(A,1),(B,1)$ et $(C,1)$,le point G vérifie $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

G est aussi le barycentre de $(A,-2),(B,1),(A,3)(C,1)$ et d'après l'associativité de $(G_1,-1)$ et $(G_2,4)$.

3. Les points G_1,G_2 et G sont alignés et l'on a $\overrightarrow{G_1G}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{G_1G_2}$

Remarque: on a aussi

$\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$

et donc

$(\vec{GG_1}+\vec{G_1G_2}+\vec{G_2A})+(\vec{GG_1}+\vec{G_1G_2}+\vec{G_2B})+(\vec{GG_1}+\vec{G_1G_2}+\vec{G_2C})=\vec{0}$

$3\vec{GG_1}+3\vec{G_1G_2}+\vec{G_2A}+\vec{G_2B}-3\vec{G_2A}=\vec{0}$

$3\vec{GG_1}+3\vec{G_1G_2}-2(\vec{G_2G_1}+\vec{G_1A})+(\vec{G_2G_1}+\vec{G_1B})=\vec{0}$

et $3\vec{GG_1}=-4\vec{G_1G_2}$

soit $\vec{G_1G}=\dfrac{4}{3}\vec{G_1G_2}$

Exercice 13

Soit A et B deux points tels que $AB=5$

1. Construire G barycentre des points pondérés (A;2) et (B;3)

La somme des coefficients $2+3\neq 0$, il existe un unique point G barycentre des points pondérés (A;2) et (B;3) qui vérifie

$2\vec{GA}+3\vec{GB}=\vec{0}$

soit en utilisant la relation de Chasles $2\vec{GA}+3(\vec{GA}+\vec{AB})=\vec{0}$

soit $5\vec{GA}+3\vec{AB}=\vec{0}$ ou encore $\vec{AG}=\dfrac{3}{5}\vec{AB}$.

Conséquence: pour tout point M du plan

$2\vec{MA}+3\vec{MB}=2(\vec{MG}+\vec{GA})+3(\vec{MG}+\vec{GB})=5\vec{MG}+2\vec{GA}+3\vec{GB}=5\vec{MG}$

RAPPEL:

Dans le cas général (A;a) et (B;b) avec $a+b\neq 0$ alors le barycentre G vérifie $a\vec{GA}+b\vec{GB}=\vec{0}$ et on déduit alors $\vec{AG}=\dfrac{b}{a+b}\vec{AB}$

G est affécté du coefficient $a+b$

et pour tout point M du plan $a\vec{MA}+b\vec{MB}=(a+b)\vec{MG}$

2. Construire G' barycentre des points pondérés $(A;-1)$ et $(B;6)$
La somme des coefficients $-1+6 \neq 0$, il existe un unique point G'
barycentre des points pondérés $(A;-1)$ et $(B;6)$ qui vérifie

$-\overrightarrow{G'A}+6\overrightarrow{G'B}=\vec{0}$

soit en utilisant la relation de Chasles $-\overrightarrow{G'A}+6(\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$

soit $5\overrightarrow{GA}+6\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ ou encore $\overrightarrow{AG'}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$.

et pour tout point M du plan $-\overrightarrow{MA}+6\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MG'}$

3. Déterminer et construire l'ensemble

$$E_1=\left(M \in \text{plan} \,\middle|\, \left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=10\right)$$

$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MG}$

$M \in E_1 \Leftrightarrow \left\|5\overrightarrow{MG}=10\right\| \Leftrightarrow 5MG=10 \Leftrightarrow MG=2$

E_1 est le cercle de centre G et de rayon 2

4. Déterminer et construire l'ensemble

$$E_2=\left(M \in \text{plan} \,\middle|\, \left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|-\overrightarrow{MA}+6\overrightarrow{MB}\right\|\right)$$

puisqe $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MG}$ et $-\overrightarrow{MA}+6\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MG'}$

alors $M \in E_2 \Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|-\overrightarrow{MA}+6\overrightarrow{MB}\right\| \Leftrightarrow \left\|5\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|5\overrightarrow{MG'}\right\| \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{MG'}\right\| \Leftrightarrow MG=MG'$

donc E_2 est la médiatrice du segment $[GG']$ donc la perpendiculaire à AB
passant par B.

5. Déterminer et construire l'ensemble

$$E_3=\left(M \in \text{plan} \,\middle|\, (2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}).(-\overrightarrow{MA}+6\overrightarrow{MB})=0\right)$$

$M \in E_3 \Leftrightarrow (2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}).(-\overrightarrow{MA}+6\overrightarrow{MB})=0 \Leftrightarrow (5\overrightarrow{MG}).(5\overrightarrow{MG'}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MG'}=0$

E_3 est le cercle de diamètre $[GG']$

Exercice 14

Soit ABCD un rectangle tel que $AB = 5$ et $BC = 9$

1. le point G est le barycentre des points pondérés (A;1), (B;1), (C;1) et (D;2)
soit H le barycentre partiel (ou isobarycentre) des points pondérés (A;1), (B;1), (C;1)
alors en utilisant l'associativité G est le barycentre des points pondérés (H;3), (D;2)
donc $\overrightarrow{HG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{HD}$

On a aussi dans le repère orthonormé direct $(A;\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})$

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C + 2x_D}{1+1+1+2} = \frac{9+18}{5} = \frac{27}{5}$$
$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C + 2y_D}{1+1+1+2} = \frac{5+5}{5} = 2$$

2. Soit I le milieu de $[BC]$, alors I est le barycentre des points (B;1),(C;1)
et I est affécté du coefficient 2
et K le point vérifiant $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ donc K est le barycentre des points (A;1),(D;2)
et K est affécté du coefficient 3
G barycentre des points (A;1),(B;1),(C,1) et (D;2)
par associativité G est le barycentre de (I;2),(K;3)
donc les points I, G et K sont alignés

3. $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD} =$

$(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD}) = 5\overrightarrow{MG}$

donc $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow M \in E$ droite parallèle
à la droite (BC) passant par le point G.