CHAPITRE 12 : LA FONCTION EXPONENTIELLE

1. Définition de la fonction exponentielle

La fonction logarithme étant une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]-\infty,+\infty[$, elle admet une fonction réciproque appelée exponentielle et notée $\exp$ $(ou\ \ x \mapsto e^x)$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = e^x \\ x \in]-\infty,+\infty[\end{array}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} x = \ln y \\ y \in]0,+\infty[\end{array}}$$

Propriété

En remplaçant dans le cadre de droite y par sa valeur tirée du cadre de gauche, on a :

$$\forall x \in]-\infty,+\infty[\qquad \ln(e^x) = x$$

De même, en remplaçant dans le cadre de gauche x par sa valeur tirée du cadre de droite, on a (en remplaçant y par x) :

$$\forall x \in]0,+\infty[\qquad e^{\ln x} = x$$

Comme indiqué $y \in]0,+\infty[$, donc $\forall x \in]-\infty,+\infty[\qquad e^x > 0$

De plus $e^0 = 1$ (puisque $\ln 1 = 0$)

2. Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

$$\forall a \in \mathbf{R} \quad \forall b \in \mathbf{R} \qquad e^{a+b} = e^a\ e^b$$

$$\forall a \in \mathbf{R},\ e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$\forall a \in \mathbf{R} \quad \forall b \in \mathbf{R} \qquad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

$\forall a \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N} \qquad (e^a)^n = e^{na}$

Exemple

Montrer que la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ est impaire.

Puisque $\forall x \in \mathbf{R}, \quad e^x > 0$ *donc* $e^x + 1 > 0$, donc la fonction est bien définie sur $\mathbf{R}$

et $x \in \mathbf{R} \Rightarrow -x \in \mathbf{R}$ de plus $f(-x) = \dfrac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \dfrac{\dfrac{1}{e^x} - 1}{\dfrac{1}{e^x} + 1} = \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x} = -\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f(x)$

La fonction f est impaire.

3. Etude de la fonction exponentielle

3.1. Sens de variation

Propriété

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbf{R}$

Conséquence

Résolution d'équations et d'inéquations :

$\forall a \in \mathbf{R}, \quad \forall b \in \mathbf{R} \qquad e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

$\forall a \in \mathbf{R}, \quad \forall b \in \mathbf{R} \qquad e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

3.2. Limites usuelles

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Démonstration

Au chapitre 10 « fonction logarithme népérien » , on a trouvé

$\forall x \in [1, +\infty[\qquad \sqrt{x} > \ln x$

puisque $\forall x \in [1, +\infty[\qquad x \geq \sqrt{x}$

alors $\forall x \in [1, +\infty[\qquad x \geq \ln x$

en utilisant la croissance de la fonction exponentielle

$\forall x \in [1, +\infty[\qquad e^x \geq e^{l,x} = x$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \quad alors \quad \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Démonstration

Posons $X = -x$, alors $e^x = e^{-X} = \dfrac{1}{e^X}$ et quand $x \to -\infty$ *alors* $X \to +\infty$

puisque $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Démonstration

Le nombre dérivé de exp en 0 est $e^0 = 1$. Mais ce nombre dérivé est aussi :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

D'où la limite cherchée.

3.3. Dérivée de la fonction exponentielle

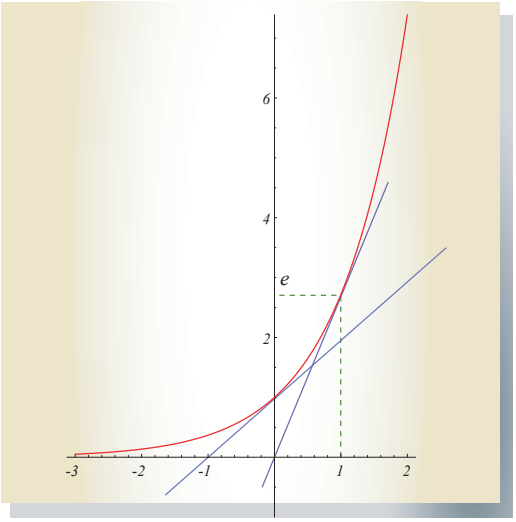
La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbf{R}$ et est égale à sa fonction dérivée

$$\forall x\in\mathbf{R},\qquad (e^x)'=e^x$$

3.4. Tableau de variation

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3.5. Courbe représentative



Remarque

Soit (C) la courbe représentative de la fonction exp dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

La tangente à la courbe au point d'abscisse $(1, e)$ est la droite d'équation $y = x\,e$, elle passe par le point O

La tangente à la courbe au point d'abscisse $(0,1)$ est la droite d'équation $y = x + 1$.