

1. a. Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

De même $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b. Calculons la dérivée, $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbf{R}$, donc $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

2. a. $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, donc l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse 0 est $y = x$

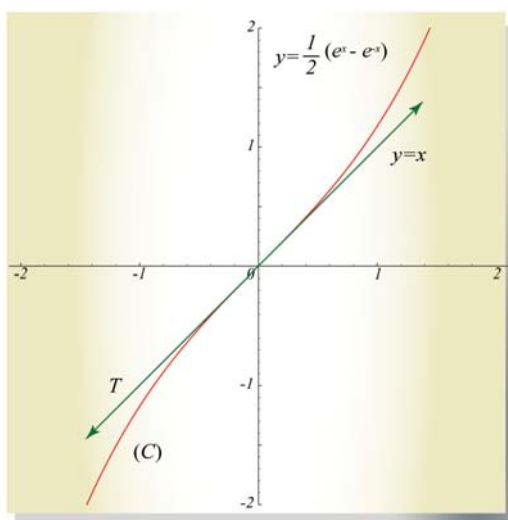
b. $\forall x \in \mathbf{R}$, $d'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1 = \frac{e^{-x}}{2}(e^{2x} - 2e^x + 1) = \frac{e^{-x}}{2}(e^x - 1)^2 > 0$

Puisque $d(0) = 0$, alors

si $x \in]-\infty, 0[$, d est négative et la courbe (C) est en dessous de la tangente T

si $x \in]0, +\infty[$, d est positive et la courbe (C) est en dessous de la tangente T

c. Tracé de la courbe (C) et de la tangente T



$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x(1 + e^{-x}) = +\infty \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(1 + e^{-x})] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 + e^{-x}) = 1 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + e^{-x})] = \ln 1 = 0$$

2) La fonction $\varphi : x \mapsto 1 + e^{-x}$ est continue, dérivable et strictement positive sur $\mathbf{R}$, donc la fonction $f : x \mapsto \ln \varphi = \ln(1 + e^{-x})$ est continue et dérivable sur $\mathbf{R}$.

$$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} < 0 \text{ puisque } e^{-x} > 0$$

La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$

$$3) \forall x \in \mathbf{R}, f(x) = \ln(1 + e^{-x}) = \ln[e^{-x}(e^x + 1)] = \ln(e^{-x}) + \ln(1 + e^x) = -x + \ln(1 + e^x)$$

$$\text{Puisque } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x) = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^x) = \ln 1 = 0$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x)] = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^x) = 0$$

La droite Δ d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe Γ en $-\infty$.

Tracé de la courbe Γ et de la tangente Δ

