1. Résolution de l'équation différentielle (1) $y' - 2y = x e^x$

On considère l'équation différentielle (2) $y' - 2y = 0$ où y est une fonction inconnue de la variable x , dérivable sur $\mathbf{R}$.

La relation (2) $y' - 2y = 0$ équivaut à $y' = 2y$ dont l'ensemble des solutions est :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad y(x) = k e^{2x} \quad \text{avec } k \text{ constante réelle.}$$

2. Soit u la fonction définie $\forall x \in \mathbf{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$ avec $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$

a). u est solution de l'équation différentielle (1) $y' - 2y = x e^x$ si et seulement si,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad u'(x) - 2u(x) = x e^{2x}$$

Calculons $u'(x)$

$$u'(x) = a e^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$$

et u est solution de (1) si et seulement si

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad (ax + a + b)e^x - 2(ax + b)e^x = x e^x$$

et donc puisque $\forall x \in \mathbf{R}$, $e^x > 0$

soit en simplifiant par la quantité non nulle e^x

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad (-ax + a - b) = x$$

L'identification des coefficients des termes de même degré conduit au système

$$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \quad \text{dont l'unique solution est } \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

b). u est solution de (1) si et seulement si $\forall x \in \mathbf{R}$, $u(x) = (-x - 1)e^x$

$$(u + v)' - 2(u + v) = x e^x$$

$$(u' - 2u) + (v' - 2v) = x e^x$$

Or u est solution de (1) donc $\forall x \in \mathbf{R}$, $u'(x) - 2u(x) = x e^x$

On en déduit que $u + v$ est solution de (1), si et seulement si, $v' - 2v = 0$ c'est-à-dire v solution de (2).

c). On déduit des résultats précédents que f est solution de (1), si et seulement si, $f = u + v$ avec :

- u solution particulière trouvée au 2.a).

- et v solution générale trouvée au 1.

Donc, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1) est l'ensemble des fonctions définies, $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = k e^{2x} + (-x-1)e^x$ avec k constante réelle.

3. La condition $f(0) = 0$ équivaut $k e^0 - e^0 = 0$ soit $k - 1 = 0$ d'où $k = 1$

La solution de l'équation différentielle (1) qui s'annule en 0 est la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = e^{2x} + (-x-1)e^x \quad .$$