

CHAPITRE 16 : CALCUL INTEGRAL

La notion d'intégrale a été définie au chapitre 9.

Rappelons que l'on a toujours $a \leq b$

1. Propriétés de l'intégrale

1.1. Relation de Chasles

Soit f continue sur I , trois réels a , b et c quelconques de l'intervalle I ,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Démonstration admise (dans le cas général, on peut facilement la démontrer lorsque f est positive sur I)

Exemple

Calculer $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$

On utilise la relation de Chasles

$$\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx = [-\cos x]_0^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 4$$

1.2. Linéarité

1.2.1. Intégrale et addition des fonctions

Propriété

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Démonstration

En effet, si F et G désignent une primitive sur I de f et g respectivement, alors

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= [F(x) + G(x)]_a^b = [F(b) + G(b)] - [F(a) + G(a)] = \\ &= [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)] = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

1.2.2. Intégrale et constante multiplicative

Propriété

$$\forall k \in \mathbf{R}, \quad \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

Démonstration

Si F désigne une primitive de f , alors

$$\forall k \in \mathbf{R}, \quad \int_a^b k f(x) dx = [kF(x)]_a^b = k[F(b)] - k[F(a)] = k[F(b) - F(a)] = k \int_a^b f(x) dx$$

Remarque

En appliquant les deux propriétés précédentes, on obtient ;

Si f_1 et f_2 sont des fonctions continues sur $[a, b]$, alors

$$\forall k_1 \in \mathbf{R}, \forall k_2 \in \mathbf{R}, \quad \int_a^b [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)] dx = k_1 \int_a^b f_1(x) dx + k_2 \int_a^b f_2(x) dx$$

1.2.3. Intversion des bornes

Propriété

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Démonstration

$$\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b) \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

1.3. Ordre et intégration

Propriété

- i). si $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
- ii). si $\forall x \in [a, b], f(x) \leq 0$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$
- iii). si $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Démonstration

i) $\int_a^b f(x) dx$ représente une aire, qui par définition est un réel positif

ii) $\int_a^b f(x) dx$ est égale à l'opposé de l'aire

iii) si $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$ alors $f(x) - g(x) \leq 0$

et d'après ii) $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx \leq 0$, soit en appliquant la linéarité de l'intégrale 1.2

alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

1.4. Valeur moyenne d'une fonction et inégalité de la moyenne.

1.4.1. Valeur moyenne d'une fonction

Définition

f une fonction continue sur un intervalle I , on appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$

le nombre réel égal à $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

Exemple

Calculer la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto \cos x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Nous avons $\int_0^{\pi/2} \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$

La valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto \cos x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est égale à $\frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$

1.4.2. Inégalité de la moyenne

Théorème

Soit f est une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels $\in I$

i) Si $\forall x \in I$, il existe deux réels m et M avec $m \leq f(x) \leq M$ alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

ii) Si $\forall x \in I$, il existe un réel $M > 0$ avec $|f(x)| \leq M$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b-a)$$

Démonstration

Si $\forall x \in I$, il existe deux réels m et M avec $m \leq f(x) \leq M$, en intégrant entre a et b , puisqu'il y a conservation de l'ordre, on obtient :

$$\int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx$$

Puisque $\int_a^b m \, dx = (b-a)m$ et $\int_a^b M \, dx = M(b-a)$

On a bien $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a)$

Exemple

Comparer les deux intégrales $I = \int_0^1 x^2 \, dx$ et $J = \int_0^1 \sqrt{1+x^4} \, dx$

On a $\forall x \in \mathbf{R}, x^4 < 1+x^4$

la fonction $\varphi : X \mapsto \sqrt{X}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

et donc, en particulier $\forall x \in [0, 1], x^2 < \sqrt{1+x^4}$

et $I = \int_0^1 x^2 \, dx < J = \int_0^1 \sqrt{1+x^4} \, dx$

1.5. Intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques

Propriété

i) Si f est une fonction paire et si f est continue sur $[-a, a]$ alors $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$

ii) Si f est une fonction impaire et si f est continue sur $[-a, a]$ alors $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$

iii) Si f est continue sur $\mathbf{R}$ et de période T alors quel que soit le nombre réel α

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \, dx = \int_0^T f(x) \, dx$$

Exemple

Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \sin \frac{x}{3} \sin^2 x \, dx$

La fonction $f : x \mapsto \sin \frac{x}{3} \sin^2 x$ est continue sur $[-\pi, \pi]$ et impaire

Donc $\int_{-\pi}^{\pi} \sin \frac{x}{3} \sin^2 x \, dx = 0$

De même $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x \, dx = 0$ (continuité et imparité)

La fonction $f : x \mapsto \tan x$ est continue sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ et impaire

Exemple

Calculer $\int_{-1}^1 |x|^3 \, dx$

La fonction $f : x \mapsto |x|^3$ est continue sur $[-1, 1]$ et paire

$$\int_{-1}^1 |x|^3 \, dx = 2 \int_0^1 x^3 \, dx = 2 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Exemple

Calculer l'intégrale $I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{2 + \cos x \sin^2 x} \, dx$

La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{2 + \cos x \sin^2 x}$ est continue sur $\mathbf{R}$, donc I existe

Puisque $\forall x \in \mathbf{R}, f(x+2\pi) = f(x)$, la fonction f est de période $T = 2\pi$

En appliquant la propriété iii) avec $\alpha = -\pi$

$$\text{on a } \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{2 + \cos x \sin^2 x} \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{2 + \cos x \sin^2 x} \, dx$$

La fonction f est aussi impaire et son intégrale sur $[-\pi, \pi]$ est nulle

$$\text{donc } I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{2 + \cos x \sin^2 x} dx = 0$$

2. Lien entre intégrale et primitive

Théorème

f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$

La fonction F définie sur I par : $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive sur I de la fonction f qui s'annule sur I .

Application

1) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$

2) En déduire que pour $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

On étudie le signe des différences

$$\frac{1}{1+t} - (1-t) = \frac{1 - (1-t^2)}{1+t} = \frac{t^2}{1+t} \text{ qui est un nombre positif lorsque } t \geq 0$$

$$\text{Donc } \forall t > 0, \quad 1 - t \leq \frac{1}{1+t}$$

De même

$$1 - t + t^2 - \frac{1}{1+t} = \frac{(1-t+t^2)(1+t) - 1}{1+t} = \frac{t^3}{1+t} \text{ qui est un nombre positif lorsque } t \geq 0$$

$$\text{Donc } \forall t > 0, \quad \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$$

Utilisons le théorème : la fonction F définie sur $I = [0, x]$ par : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ est l'unique primitive sur $[0, x]$ de la fonction f qui s'annule en 0.

Si $x \geq 0$, les inégalités précédentes sont valables sur $[0, x]$, et donc

$$\int_0^x (1-t) dt \leq \int_0^x \frac{dt}{1+t} \leq \int_0^x (1-t+t^2) dt$$

soit

$$\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Application

F est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

Déterminer le sens de variation de F sur $\mathbf{R}$

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbf{R}$, donc F existe et F est l'unique primitive de f qui s'annule pour $x = 0$.

F est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}, F'(x) = \left(\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \right)' = \frac{1}{1+x^2}$

donc $\forall x \in \mathbf{R}, F'(x) > 0$

F est strictement croissante sur $\mathbf{R}$

3. Calcul de volume

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

L'unité de volume est le volume du cube ayant pour arête l'unité de longueur définie par le repère

Théorème

On considère un solide délimité par les plans d'équations respectives $z = a$ et $z = b$.

On désigne par $B(z)$ la section plane de ce solide avec le plan perpendiculaire à Oz de cote z ($a \leq z \leq b$)

On note $S(z)$ l'aire de la section $B(z)$

Le volume V , en unités de volume, de ce solide est égal à :

$$V = \int_a^b S(z) dz$$

Exemple

Volume d'une sphère

Considérons la sphère de centre O et de rayon R .

Elle est située entre les plans de cotes $-R$ et R

Soit z un réel de $[-R, R]$. L'intersection de la sphère et du plan de cote z est le disque $B(z)$ de

rayon $r = \sqrt{R^2 - z^2}$ dont l'aire est égale à $S(z) = \pi r^2 = \pi(R^2 - z^2)$

La fonction $f : z \mapsto S(z)$ est une fonction continue sur $[-R, R]$

Le volume de la sphère est donc égal à :

$$V = \int_{-R}^R S(z) dz = \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2) dz = \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{-R}^R = \pi \left[\frac{2R^3}{3} - \left(-\frac{2R^3}{3} \right) \right] = \frac{4}{3} \pi R^3$$