1) Linéarisation de $f(x) = \sin^4 x - 3\sin^2 x \cos^2 x$

Nous pouvons écrire : $f(x) = \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^2 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$

puis en remplaçant $\sin^2 2x$ *par* $1-\cos^2 2x$

$$f(x) = \cos^2 2x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos 4x) - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x$$

La dernière égalité fournit la linéarisation de $f(x)$

2) Notons h la fonction définie par $h(x) = x\,f(x)$. Les fonctions f *et* g *avec* $g(x) = x$ étant continues sur R le sont sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$; la fonction produit $h = f\,x\,g$ est donc continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, ce qui justifie l'existence de l'intégrale I.

- Calcul de I :

Intégrons par parties en posant :

$$u(x) = x \qquad \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v(x) = \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x \qquad \Leftarrow v'(x) = f(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x$$

Il vient :

$$I = \left[x(\frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x)\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (\frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x)\,dx$$

soit :

$$I = \left[x(\frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x) + (\frac{1}{32}\cos 4x - \frac{1}{8}\cos 2x)\right]_0^{\pi/4}$$

et donc $I = (-\frac{\pi}{16} - \frac{1}{32}) - (\frac{1}{32} - \frac{1}{8})$

Finalement $I = \frac{1}{16}(1-\pi)$