CHAPITRE 4 : LIMITES

La lettre grecque α *désigne soit* $+\infty$, *soit* $-\infty$, soit a un réel fini $(a \in \mathbf{R})$

1. LIMITES

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, et on note C_f la courbe représentative de la fonction f dans ce repère

1.1. Limite égale à plus l'infini

On considère une fonction f définie au voisinage de α, ce qui signifie que :

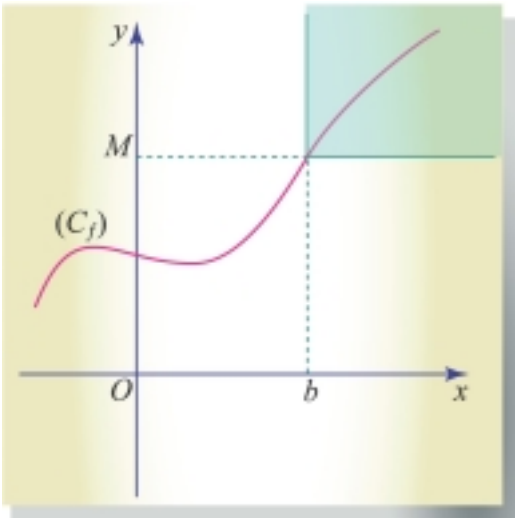
- lorsque α désigne $+\infty$, la fonction f est définie sur un intervalle $]b\,;+\infty[$ $(b \in \mathbf{R})$
- lorsque α désigne $-\infty$, la fonction f est définie sur un intervalle $]-\infty;\ b[$ $(b \in \mathbf{R})$
- Lorsque $\alpha = a$ *fini* $(a \in \mathbf{R})$, la fonction f est définie sur $]a;\ a+h[$ *ou* $]a-h\,;\ a[$ *ou* $]a-h\,;\ a+h[$ $(h \in \mathbf{R}_+^*)$

Définition

Dire que la limite de f en α est $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]M\,;+\infty[$ $(M \in \mathbf{R})$ contient tous les réels $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de α..

On écrit $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$ *ou encore* $\lim\limits_{\alpha} f(x) = +\infty$ et on dit aussi que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers α

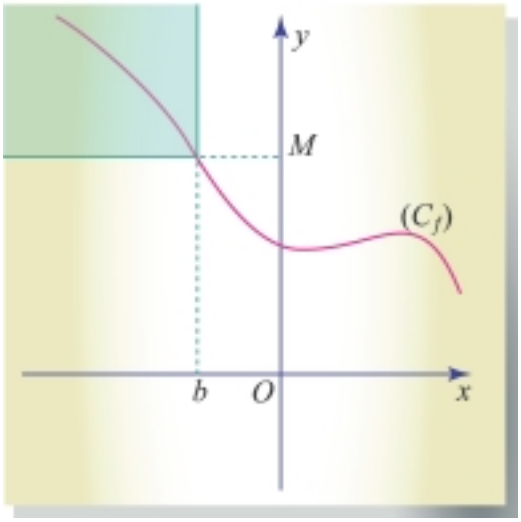
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ implique : on peut trouver une valeur b suffisamment grande telle que pour toute valeur M aussi grande que l'on veut on ait si $x > b$ alors $f(x) > M$



Exemple

Les fonctions $x \mapsto x$; $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbf{N}^*)$; $x \mapsto \sqrt{x}$ vérifient $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ $n \in \mathbf{N}^*$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

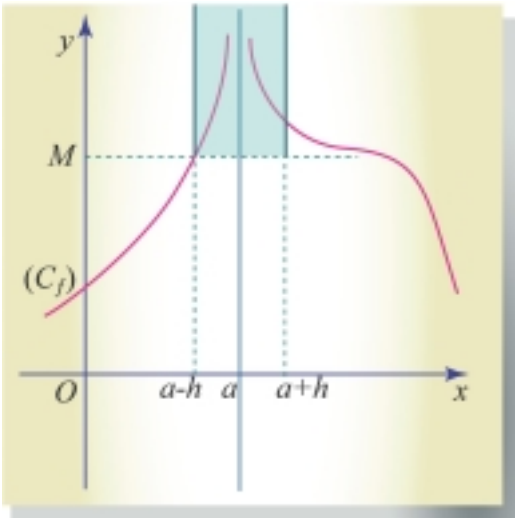
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ implique : on peut trouver une valeur b telle que pour toute valeur M aussi grande que l'on veut on ait si $x < b$ alors $f(x) > M$



Exemple

Les fonctions $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbf{N}^*, n\ pair)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2) = +\infty$ ainsi que $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^{2p}) = +\infty$ *avec* $p \in \mathbf{N}^*$

On peut trouver une valeur h suffisamment petite telle que pour toute valeur M aussi grande que l'on veut si $x \in \left]a-h, a+h\right[$ alors $f(x) > M$



Exemple

Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sont définies sur $\left]0;+\infty\right[$ et vérifient $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

1.2. Limite égale à moins l'infini

Définition

Dire que la limite de f en α *est* $-\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $\left]-\infty; M\right[$ (*où* $M \in \mathbf{R}$) contient tous les réels $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de α.

On note $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$ *ou encore* $\lim\limits_{\alpha} f = -\infty$

Exemple

Les fonctions $x \mapsto x$; $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbf{N}^*$, n impair) et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x) = -\infty$ ainsi que $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^{2p+1}) = -\infty$ *avec* $p \in \mathbf{N}$

1.3. Limite égale à un réel fini L (ou encore limite finie)

Soit L un nombre réel fini $(L \in \mathbf{R})$

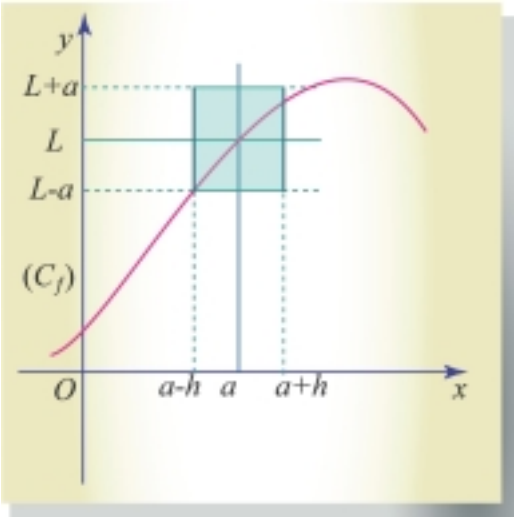
Définition

Dire que la limite de f en α est le réel L signifie que tout intervalle de la forme $]L - A; L + A[$ $(A \in \mathbf{R}_+^*)$ contient tous les réels $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de α.

On écrit $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = L$ *ou encore* $\lim\limits_{\alpha} f = L$

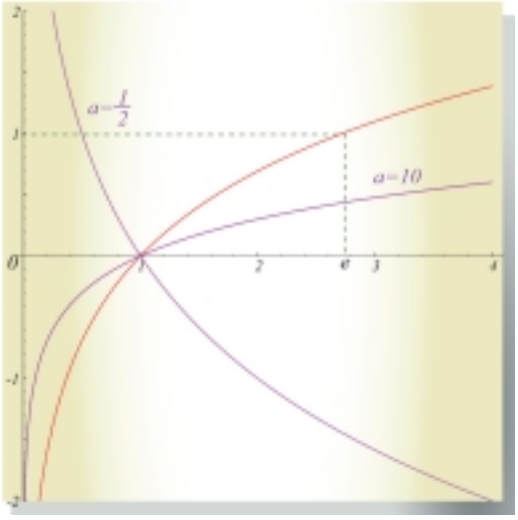
On dit aussi que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers α.

On peut trouver une valeur h suffisamment petite telle que pour $x \in]a - h, a + h[$ alors $f(x) \in]A - L, A + L[$ pour toute valeur A positive



Exemple

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $]0;+\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$



(Interprétation graphique au chapitre suivant ANAL 05)

Remarque

Certaines limites peuvent ne pas exister; Ainsi la fonction définie sur **R** par $f(x) = \sin x$ $(ou\ \ g(x) = \cos x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$ (ni en $-\infty$)

Théorème

Si une limite existe alors elle est unique. Ce théorème est admis

2. OPERATIONS sur les LIMITES.

2.1. Limite de la somme de deux fonctions

Si f admet pour limite en α	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si g admet pour limite en α	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors f + g admet pour limite en α	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*pas de conclusion*

La démonstration de ce théorème est admise

2.2. Limite du produit de deux fonctions

Si f admet pour limite en α	L	$L \neq 0$	0	∞
et si g admet pour limite en α	L'	∞	∞	∞
alors f x g admet pour limite en α	$L \times L'$	∞	*pas de conclusion*	∞

La démonstration de ce théorème est admise.

2.3. Limite du quotient de deux fonctions

Si f admet pour limite en α	L	$L \neq 0$	∞	∞	0
et si g admet pour limite en α	$L' \neq 0$	0	L'	∞	0
alors $\frac{f}{g}$ *admet pour limite en α*	$\frac{L}{L'}$	∞	∞	*pas de conclusion*	*pas de conclusion*

La démonstration de ce théorème est admise.

Lorsqu'il n'y a pas de conclusion, on dit alors que c'est un cas de forme indéterminée.

Nous rencontrerons cette année 4 cas de formes indéterminées que nous noterons abusivement

$"\infty - \infty"$; $"0 \times \infty"$; $"\frac{\infty}{\infty}"$; $"\frac{0}{0}"$

En présence d'une forme indéterminée, il faut lever l'indétermination, si c'est possible, en transformant l'écriture de la fonction de façon à pouvoir conclure.

Parmi ces transformations, on peut citer :

- la technique de mise en facteur du terme dominant
- la technique de modification d'écriture, en particulier en utilisant la quantité conjuguée
- la technique d'encadrement (voir chapitre suivant ANAL05)
- la technique utilisant le taux d'accroissement (voir chapitre dérivée ANAL06)

Exemple

Calculer les limites éventuelles suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+x^3)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-x^3)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^2+x^3)$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^2-x^3)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

Dans ce cas il n'y a pas de forme indéterminée et on applique le théorème sur la limite d'une somme, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+x^3)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

Les résultats obtenus sur la limite d'une somme algébrique ne permettent pas de conclure.

On est en présence d'une forme indéterminée "$+\infty-\infty$"

On peut par exemple, mettre le terme de plus haut degré en facteur.

$x^2-x^3=x^3(\frac{1}{x}-1)$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{1}{x}-1)=-1$

Avec cette écriture, il n'y a plus de forme indéterminée, en appliquant le théorème sur la limite d'un produit, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-x^3)=-\infty$

Dans cet exemple, on obtient (évidemment) le même résultat en écrivant $x^2-x^3=x^2(1-x)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$

Dans ce cas il n'y a pas de forme indéterminée et on applique le théorème sur la limite d'une somme, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2+x^3)=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)=+\infty$

Les résultats obtenus sur la limite d'une somme algébrique ne permettent pas de conclure.
On est en présence d'une forme indéterminée "$+\infty-\infty$"

On écrit $-x^2-x^3=-x^3(\frac{1}{x}+1)$ puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{1}{x}+1)=1$

alors $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2-x^3)=+\infty$

Exemple

Déterminer les limites éventuelles en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions rationnelles suivantes :

a) $f : x\mapsto \dfrac{x^2-3x+4}{2x^2+x+1}$

b) $g : x\mapsto \dfrac{x^2+1}{2x+1}$

c) $h : x\mapsto \dfrac{x+1}{2x^2+x+1}$

a) Pour tout x réel non nul $x^2-3x+4=x^2(1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2})$ et $2x^2+x+1=2x^2(1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2x^2})$

après simplification par x^2, nous obtenons $f(x)=\dfrac{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{2(1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2})}$

Puisque $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2})=1$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}2(1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2})=2$

En utilisant la limite d'un quotient

Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{2x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{2x^2+x+1}=\dfrac{1}{2}$

b) Pour tout x réel non nul $x^2+1=x^2(1+\frac{1}{x^2})$ et $2x+1=2x(1+\frac{1}{2x})$

après simplification par x, nous obtenons $\forall x\in \mathbf{R}-\left\{0,-\frac{1}{2}\right\}$ $\quad g(x)=\dfrac{x(1+\frac{1}{x^2})}{2(1+\frac{1}{2x})}$

En utilisant la limite d'un quotient, le numérateur tend vers $+\infty$ *ou* $-\infty$ et le dénominateur tend vers 2 quand x tend vers $+\infty$ *ou* $-\infty$

Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{2x+1}=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{2x+1}=-\infty$

c) Pour tout x réel non nul $x+1=x(1+\frac{1}{x})$ et $2x^2+x+1=2x^2(1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2x^2})$

après simplification par x, nous obtenons $\forall x\in \mathbf{R}^*$ $\quad h(x)=\dfrac{1+\frac{1}{x}}{2x(1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2})}$

En utilisant la limite d'un quotient, le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers l'infini, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{2x^2+x+1}=0^-$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{2x^2+x+1}=0^+$

Conclusion : Limites à l'infini d'un polynôme, d'une fraction rationnelle

En $+\infty$ et en $-\infty$, tout polynôme admet une limite, qui est celle de son monôme de plus haut degré

En $+\infty$ et en $-\infty$, toute fonction rationnelle admet une limite, qui est celle du quotient des monômes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur

Exemple

Déterminer la limite en 2 des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2+5x+6}$ $\qquad$ b) $g(x)=\dfrac{2x^2-x-6}{x^2+x-6}$

a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x-6)=0$ et $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+5x+6)=20$

Seul le numérateur s'annule pour la valeur 2.

En appliquant la limite d'un quotient, on trouve le résultat $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2+5x+6}=0$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\ (2x^2-x-6)=0$ et $\lim\limits_{x\to 2}\ (x^2+x-6)=0$

En $x=2$, g est le quotient de deux fonctions de limite nulle, et l'on aboutit à une forme indéterminée "$\dfrac{0}{0}$". Précisément, puisque nous avons une telle forme indéterminée, on peut mettre $(x-2)$ en facteur au numérateur et au dénominateur.

$2x^2-x-6=2(x-2)(x+\dfrac{3}{2})$ et $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

$\forall x\in \mathbf{R}-\{2,-3\}$ alors $f(x)=\dfrac{2x^2-x-6}{x^2+x-6}=\dfrac{2(x-2)(x+\frac{3}{2})}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{2x+3}{x+3}$

et $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+x-6}=\dfrac{7}{5}$

Voir aussi l'exemple 10 de ce chapitre ANAL04

Exemple

Déterminer la limite en 1 de la fonction suivante $f(x)=\ (\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2})$

On est en présence d'une forme indéterminée "$\infty-\infty$". Il faut utiliser la technique de modification d'écriture, en réduisant au même dénominateur, on a

$\forall x\in \mathbf{R}-\{-1,1\}\ :\ \dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}=\dfrac{1+x}{(1-x)(1+x)}-\dfrac{2}{1-x^2}=\dfrac{x-1}{(1-x)(1+x)}=-\dfrac{1}{1+x}$

et $\lim\limits_{x\to 1}\ (\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2})=-\dfrac{1}{2}$

Exemple

Déterminer la limite en 1 de la fonction $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1}$

Soit $f:\ x\mapsto \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1}$

Alors le domaine de définition de f est $D_f=\left[-\dfrac{1}{2},1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

$\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1})=\sqrt{3}-\sqrt{3}=0$ et $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$

On est en présence d'une forme indéterminée "$\dfrac{0}{0}$". Il faut utiliser la technique de modification d'écriture, en utilisant la quantité conjuguée.

Partons de l'identité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

La quantité conjuguée de $(a-b)$ est $(a+b)$ (et celle de $(a+b)$ est $(a-b)$)

Multiplions le numérateur et le dénominateur de f(x) par l'expression conjuguée de $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}$ c'est-à-dire par $\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}$

Pour tout x de D_f alors $\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}\neq 0$ et

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1}\\
&=\frac{\left[\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}\right]\left[\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}\right]}{(x-1)\left[\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}\right]}=-\frac{1}{\left[\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}\right]}\\
&=\frac{-x+1}{(x-1)\left[\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}\right]}
\end{aligned}$$

puisque $\lim\limits_{x\to 1}\left[\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}\right]=2\sqrt{3}$ alors $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1}=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

Exemple

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction $f:x\mapsto\sqrt{x^2+x}-2x$

Le domaine de définition de la fonction f est $D_f=\left]-\infty,-1\right]\cup\left[0,+\infty\right[$

Etude en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x(x+1)} = +\infty$ et donc en $-\infty$, il n'y a pas de forme indéterminée et

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x} - 2x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x(x+1)} = +\infty$ et donc en $+\infty$, f se présente sous une forme indéterminée "$\infty - \infty$".

On a en transformant l'expression

$\forall x \in \left]0,+\infty\right[: \ f(x) = \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})} - 2x = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 2x$

$\forall x \in \left]0,+\infty\right[: \ |x| = x$

soit $\forall x \in \left]0,+\infty\right[: \ f(x) = x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 2\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 2\right] = -1$

en utilisant la limite d'un produit, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - 2x = -\infty$

Exemple

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x} - x$

Le domaine de définition de la fonction f est $D_f = \left]-\infty,-1\right] \cup \left[0,+\infty\right[$

- Etude en $-\infty$

Il n'y a pas de forme indéterminée et $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x} - x = +\infty$

- Etude en $+\infty$

f se présente sous une forme indéterminée, et la technique de calcul de l'exemple précédent n°6 conserve une forme indéterminée

On utilise alors la technique de la quantité conjuguée

$\forall x \in \left]0,+\infty\right[: \sqrt{x^2+x} + x \neq 0$

En multipliant le numérateur et le dénominateur de f par $\sqrt{x^2+x}+x$, on obtient

$$\forall x \in \left]0,+\infty\right[: \ f(x)=\frac{\left[\sqrt{x^2+x}-x\right]\left[\sqrt{x^2+x}+x\right]}{\left[\sqrt{x^2+x}+x\right]}=\frac{x}{\left[\sqrt{x^2+x}+x\right]}$$

$$\forall x \in \left]0,+\infty\right[: \ f(x)=\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$

et la limite d'un quotient permet de conclure

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\frac{1}{2}$$

3. LIMITES des FONCTIONS COMPOSEES

Dans ce paragraphe, f est une fonction définie sur un intervalle I, et g est définie sur un intervalle contenant $f(I)$

α, L et L' désignent des nombres réels, ou $+\infty$, ou $-\infty$

Théorème

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=L$ et si $\lim\limits_{x\to L} g(x)=L'$ alors $\lim\limits_{x\to L}(g\circ f)(x)=L'$

Exemple

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction h définie sur $\left[1,+\infty\right[$ par $h(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x^2+1}}$

On peut écrire $h(x)=(gof)(x)$ avec $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$ et $g(x)=\sqrt{x}$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2+1}=0$ et $\lim\limits_{X\to 0}\sqrt{X}=0$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x^2+1}}=0$

Exemple

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction h définie sur $\mathbf{R}-\left\{-\frac{2}{3}\right\}$ par $h(x)=\sin(\frac{\pi x+1}{3x+2})$

On peut écrire $h(x)=(g\circ f)(x)$ avec $f(x)=\frac{\pi x+1}{3x+2}$ et $g(x)=\sin x$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi x+1}{3x+2})=\frac{\pi}{3}$ et $\lim\limits_{X\to\frac{\pi}{3}}\sin X=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(\frac{\pi x+1}{3x+2})=\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. Limites à gauche et à droite (limite latérale)

Soit *f* une fonction et *a* un réel fini $(a\in\mathbf{R})$; *L* désigne un réel, $-\infty$ *ou* $+\infty$

Dire que *f* admet *L* comme limite à gauche en a signifie que la restriction de *f* à $]-\infty,a[$ admet *L* comme limite en *a*.

On note indifféremment

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=L$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} f(x)=L$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$

Dire que *f* admet *L* comme limite à droite en a signifie que la restriction de *f* à $]a,+\infty[$ admet *L* comme limite en *a*.

On note indifféremment

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=L$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x)=L$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$

Théorème

Si la fonction *f* admet une limite en *a*, alors f admet des limites à gauche et à droite de *a* (pourvu que la fonction *f* soit définie en *a*), et de plus

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

La contraposée de ce théorème est très utile, puisque si les limites à gauche et à droite de *a* sont différentes, alors *f* n'admet pas de limite en *a*.

Exemple

Montrer que $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x-3}{x^2+x-6}$ n'existe pas.

Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x-3}{x^2+x-6}$ alors $D_f = \mathbf{R} - \{2, -3\}$

Puisque $x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$

En utilisant le signe du trinôme du second degré :

$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x-2)(x+3) = 0^+$ et $\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} (x-2)(x+3) = 0^-$

En appliquant la limite d'un quotient $\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{2x-3}{x^2+x-6} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{2x-3}{x^2+x-6} = +\infty$

Les limites à gauche et à droite de 2 sont infinies (et de signe différent), la fonction n'admet pas de limite en 2.

Exemple

Montrer que $\lim_{x\to 0} x\left|1+\dfrac{1}{x}\right|$ n'existe pas

C'est une forme indéterminée "$0\ x\infty$"

En utilisant le signe du trinôme du second degré, on a pour

si $x \in \left]0, +\infty\right[$ $\quad x\left|1+\dfrac{1}{x}\right| = x+1$ et donc $\lim_{x\to 0^+} x\left|1+\dfrac{1}{x}\right| = \lim_{x\to 0^+}(x+1) = 1$

si $x \in \left[-1, 0\right[$ $\quad x\left|1+\dfrac{1}{x}\right| = x\left(-1-\dfrac{1}{x}\right)$ *car alors* $1+\dfrac{1}{x} < 0$ et donc

$\lim_{x\to 0^-} x\left|1+\dfrac{1}{x}\right| = \lim_{x\to 0^-}(-1-x) = -1$

Puisque les limites à gauche et à droite de 0 sont différentes, la limite en 0 n'existe pas.