Solution ANAL06S01

Soit $f : \left| \begin{array}{l}]1,+\infty[\to \mathrm{R} \\ x \mapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{x}} \end{array} \right.$

Etudions la dérivabilité en 1

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}} = +\infty$$

La fonction n'est pas dérivable en 1.

La courbe représentative admet au point $A(1,0)$ une demi-tangente parallèle à $y'y$

Solution ANAL06S02

D'après le signe du trinôme du second degré, la fonction est définie sur $[-1,+\infty[$

En utilisant la composition de fonctions continues, elle est continue sur cet intervalle

f est-elle dérivable en 0 ?

Formons $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2(x+1)}}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{|x|\sqrt{x+1}}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} (x+1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} -(x+1) = -1 \end{cases}$

La fonction f n'est pas dérivable en 0. Le point O(0,0) est un point anguleux.

f est dérivable à gauche de 0, et le nombre dérivé à gauche de 0 est $f'_g(0) = -1$ et donc la courbe représentative de f admet au point O(0,0) une demi-tangente à gauche de pente -1

f est dérivable à droite de 0, et le nombre dérivé à droite de 0 est $f'_d(0) = 1$ et donc la courbe représentative de f admet au point O(0,0) une demi-tangente à droite de pente 1

© Gérard Hirsch – Maths54

f est-elle dérivable en -1 ?

La fonction n'est définie qu'à droite de -1

Formons $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{\sqrt{x^2(x+1)}}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{-x}{\sqrt{x+1}} = +\infty$

La fonction f n'est pas dérivable en -1 puisque la limite n'est pas finie, la courbe représentative de f admet au point $A(-1,1)$ une demi-tangente à droite parallèle à y' y

© Gérard Hirsch – Maths54