CHAPITRE 7 : DERIVATION DES FONCTIONS COMPOSEES - DERIVEE N-IEMES

1. DERIVATION d'une FONCTION COMPOSEE

1.1. Dérivée d'une fonction composée

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur $f\left(I\right)$.

La fonction composée $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$\forall x_0 \in I,\ (g \circ f)'(x_0) = g'\left[f(x_0)\right]\ f'(x_0)$$

La démonstration de ce théorème est admise

Formulation différentielle de ce résultat :

Posons $y = f(x)$ et $z = g(y) = (g \circ f)(x)$

On a alors :

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0) \qquad g'(y_0) = \frac{dz}{dy}(y_0) \text{ puis } (g \circ f)'(x_0) = \frac{dz}{dx}(x_0)$$

La propriété précédente s'écrit donc : $\dfrac{dz}{dx}(x_0) = \dfrac{dz}{dy}(y_0)\ \dfrac{dy}{dx}(x_0)$

ce qui donne par abus de notation $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy}\ \dfrac{dy}{dx}$

Exemple

Donner le domaine de dérivabilité de la fonction $h: x \mapsto \cos^4 x + \cos^3 x - 2\cos x + 3$ ainsi que sa fonction dérivée

La fonction h est définie sur $D = \mathbf{R}$

La fonction h peut s'écrire $g \circ f$ avec $f : x \mapsto \cos x$ et $g : y \mapsto y^4 + y^3 - 2y + 3$

Ces deux dernières fonctions sont dérivables sur $\mathbf{R}$, par conséquent h aussi.

Puisque $f'(x) = -\sin x$ et $g'(y) = 4y^3 + 3y^2 - 2$

Alors $\forall x \in D' = \mathbf{R}$ $\qquad h'(x) = (4\cos^3 x + 3\cos^2 x - 2)(-\sin x)$

Exemple

Donner le domaine de dérivabilité de la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ ainsi que sa fonction dérivée

La fonction h est définie sur $D = [\,1, +\infty\,[$ (ou sur $D =]\,-\infty, -3\,]$)

La fonction h peut s'écrire $g \text{ o } f$ avec $f : x \mapsto x^2 + 2x - 3$ et $g : y \mapsto \sqrt{y}$

La fonction f étant un polynôme est dérivable sur $\mathbf{R}$ tout entier et $f'(x) = 2x + 2$

la fonction g n'est dérivable que sur $]\,0, +\infty\,[$ et $g'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$

La fonction h n'est dérivable que sur $D' =]\,1, +\infty\,[$ (ou sur $D' =]\,-\infty, -3\,[$)

et $\forall x \in D' =]\,1, +\infty\,[$ $(ou\ ]\,-\infty, -3\,[\ )$ $\qquad h'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$

Vérifions que h n'est pas dérivable en 1 puisque

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(1+x) - h(1)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{(1+x)^2 + 2(1+x) - 3}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4+x}}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Exemple

Donner le domaine de dérivabilité de la fonction $h : x \mapsto \cos \dfrac{1}{x}$ ainsi que sa fonction dérivée

La fonction h est définie sur $D = \mathbf{R}^*$

La fonction h peut s'écrire $g \text{ o } f$ avec $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $g : y \mapsto \cos y$

La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

la fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $g'(y) = -\sin y$

La fonction h est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et $\forall x \in D' = \mathbf{R}^*$ $\qquad h'(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$

2. Résultats classiques pour une autre utilisation du théorème de dérivation des fonctions composées

On montre facilement que

- la fonction $x \mapsto \sin(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, de fonction dérivée : $x \mapsto a\cos(ax+b)$
- la fonction $x \mapsto \cos(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, de fonction dérivée : $x \mapsto -a\sin(ax+b)$
- Soit n un entier strictement supérieur à 1, et f une application d'un intervalle I dans $\mathbf{R}$, dérivable sur I, la fonction f^n est dérivable sur I, de fonction dérivée : $x \mapsto n(f^{n-1}(x))f'(x)$
- Soit n un entier strictement supérieur à 1, et f une application d'un intervalle I dans $\mathbf{R}$, dérivable sur I et telle que f ne s'annule pas sur I, la fonction $\frac{1}{f^n}$ est dérivable sur I, de fonction dérivée : $x \mapsto -n\frac{f'(x)}{f^{n+1}(x)}$

Exemple

Donner le domaine de dérivabilité de la fonction $h: x \mapsto \frac{1}{(2x^2+3x+5)^2}$ ainsi que sa fonction dérivée

D'après le signe du trinôme du second degré $\forall x \in \mathbf{R}$ $\qquad 2x^2+3x+5>0$ et la fonction h est définie sur $D = \mathbf{R}$

et $\forall x \in D' = D = \mathbf{R}$ $\qquad h'(x) = -\frac{2(4x+3)}{(2x^2+3x+5)^3}$

- Soit f une application d'un intervalle I dans $\mathbf{R}_+$, dérivable sur I, la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable en tout point x de I tel que $f(x) > 0$, de fonction dérivée : $x \mapsto \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

3. Nouvelle utilisation du théorème de dérivation des fonctions composées :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J, et g une fonction définie sur l'intervalle J

Si f et g ont le même sens de variation, l'une sur I et l'autre sur J, alors la fonction composée $g \circ f$ est croissante sur I

Si f et g ont des sens de variation contraires, l'une sur I et l'autre sur J, alors la fonction composée $g \circ f$ est décroissante sur I

4. DERIVEES SUCCESSIVES.

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$.

On suppose que les fonctions f et f' sont dérivables sur I. Si la fonction f' admet une fonction dérivée, celle ci est appelée dérivée seconde de f et est notée $f'' = (f')'$

La fonction f' est appelée dérivée première pour éviter toute confusion.

On définit par récurrence la fonction dérivée $n^{ième}$ ou d'ordre n de f, et est notée $f^{(n)}$

et $\forall n \in \mathbf{N}$ $\quad f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ avec les conventions $f^{(0)} = f$ et $f^{(1)} = f'$

Remarque

On écrira symboliquement

$\dfrac{df}{dx}$ au lieu de f', $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ au lieu de f'' et $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ au lieu de $f^{(n)}$

Si pour tout entier naturel non nul, la fonction f est n fois dérivable, on dit que la fonction f est indéfiniment dérivable

Les fonctions sinus et cosinus sont indéfiniment dérivables sur $\mathbf{R}$

Par récurrence, on montre que

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$$

Soit $a \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R}$

$$\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^k = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{k!}{(k-n)!}(x-a)^{k-n} & si\ \ k > n \\ k! & si\ \ k = n \\ 0 & si\ \ k < n \end{array} \right.$$

Soit $a \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R} - \{a\}$

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x-a}\right) = \frac{(-1)^n\, n!}{(x-a)^{n+1}}$$

Exemple

Dérivée d'un polynôme

Soit un polynôme de degré n défini par $P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \ \ avec\ \ a_n \neq 0$

alors $P'(x) = na_n\, x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}\, x^{n-2} + ... + a_1$ et $P^{(n)}(x) = (n!)\, a_n$ puis $P^{(n+1)}(x) = 0$

Toute fonction polynomiale de degré n est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ et la dérivée $(n+1)^{ème}$ est la fonction identiquement nulle.

Exemple

Soit *f* la fonction définie par $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$

1° Déterminer sa fonction dérivée première et vérifier la relation : $\sqrt{1+x^2}\ \ f'(x) = f(x)$

2° En déduire que la fonction dérivée seconde vérifie la relation :

$$(1+x^2)\ f''(x) + x\ f'(x) - f(x) = 0$$

1° $f(x)$ est définie $\forall x \in \mathbf{R}$, et en dérivant on obtient $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}$ (ou encore produit des extrêmes égal au produit des moyens)

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad \sqrt{1+x^2}\ f'(x) = f(x)$$

2° on dérive cette dernière relation, en appliquant en particulier la dérivation d'un produit

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} f'(x)+\sqrt{1+x^2}\ f''(x)=f'(x)$$

on réduit au même dénominateur

$$x\,f'(x)+(1+x^2)\ f''(x)=\sqrt{1+x^2}\ f'(x)$$

En utilisant le résultat de la première question, on obtient (l'équation différentielle)

$$\forall x\in\mathbf{R} \qquad (1+x^2)\ f''(x)+x\,f'(x)-f(x)=0$$

5. DERIVATION et BIJECTION. DERIVEE d'une FONCTION RECIPROQUE.

5.1. Bijection

La fonction f définie sur $I\subset\mathbf{R}$ est une bijection de I *sur* $f(I)$ si $\forall y\in f(I)$ l'équation $f(x)=y$ admet une solution unique sur I

Théorème

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f est une bijection de I sur $f(I)$ et les intervalles I et $f(I)$ sont de même nature.

Si f est strictement croissante, $f([\,a,b])=[f(a),f(b)]$

Si f est strictement décroissante, $f([\,a,b])=[f(b),f(a)]$

5.2. Définition et propriétés de la fonction réciproque

Si f est une bijection de I sur $f(I)$, alors il existe une fonction réciproque de f, notée f^{-1}.

L'ensemble de définition de f^{-1} est $f(I)$ et l'image par f^{-1} de $f(I)$ est I

La fonction f^{-1} est telle que

$$\boxed{\begin{array}{l} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = f(y) \\ y \in I \end{array}}$$

La fonction f^{-1} est une bijection de $f\left(I\right)$ sur *I*

La composée $(f^{-1} \circ f)$ est l'application identique de *I* sur *I*

La composée $(f \circ f^{-1})$ est l'application identique de $f\left(I\right)$ sur $f\left(I\right)$

Si *f* est continue sur *I*, f^{-1} est continue sur $f\left(I\right)$

Si *f* est strictement monotone sur *I*, f^{-1} est strictement monotone sur $f\left(I\right)$ et de même sens de variation que *f*.

Dans un repère orthonormé, les courbes C_f *et* $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (la première bissectrice des axes de coordonnées)

5.3. Dérivée d'une fonction réciproque

Soit *f* dérivable sur *I* et admettant sur *I* une fonction réciproque f^{-1}

f^{-1} est dérivable en tout point $(x_0, y_0 = f(x_0))$ tel que $f'(x_0) \neq 0$ et

$$\left[f^{-1}(y_0)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

que l'on écrit symboliquement

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

La pente de la tangente à $C_{f^{-1}}$ au point de coordonnées (x_0, y_0) est l'inverse de la pente de la tangente au point de coordonnées (y_0, x_0).

Exemple

Soit *f* la fonction définie par : $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$, $f(x) = 2\cos x - \cos 2x$

1) Montrer que f admet une fonction réciproque, f^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et les propriétés.

2) Calculer les valeurs de f^{-1} et de sa fonction dérivée, pour les valeurs $-\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}$ et 1 de la variable

La fonction est définie pour $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ *par* $f(x) = 2\cos x - \cos 2x$, cette fonction est continue et dérivable sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

$\forall x \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right] \qquad f'(x) = -2\sin x + 2\sin 2x = -2\sin x + 4\sin x\cos x = 2\sin x(2\cos x - 1)$

x	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$	*0*				$-$				*0*
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1	$\searrow$	$\frac{-1}{2}$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\searrow$	-3

f définit une bijection de $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ sur $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$

L'application réciproque f^{-1} est définie, continue et strictement décroissante de $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$ sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ La représentation graphique de f^{-1} se déduit de celle de f dans la symétrie par rapport à la première bissectrice.

Puisque $f(\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2}$ *et* $f'(\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$

Alors $f^{-1}(-\sqrt{2}) = \frac{3\pi}{4}$ *et* $f^{-1}{}'(-\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

De même $f(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ *et* $f'(\frac{2\pi}{3}) = -2\sqrt{3}$

alors $f^{-1}(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$ *et* $f^{-1}\,'(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$

Enfin $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ *et* $f'(\frac{\pi}{2}) = -2$

alors $f^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$ *et* $f^{-1}\,'(1) = -\frac{1}{2}$