CHAPITRE 8 : FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

1. PLAN D'ÉTUDE D'UNE FONCTION TRIGONOMÉTRIQUE PERIODIQUE

On considère un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction.

2. Recherche d'une éventuelle période T (T>0 le plus petit possible). On étudie la fonction pour $x \in E_1 = [\,\alpha, \alpha+T\,] \cap D$, *avec* α à déterminer en tenant compte des autres propriétés de la fonction.

3. Parité ou imparité

Si la fonction est paire ou impaire, on prend en général $\alpha = -\frac{T}{2}$ et donc l'intervalle $E_1 = \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \cap D$ et l'on réduit l'étude à l'intervalle $E_2 = \left[0, \frac{T}{2}\right] \cap D$

Remarque

On peut aussi prendre $\alpha = 0$ et dans certains cas d'autres valeurs de α sont préférables.

4. Centre de symétrie. Axe de symétrie

On peut aussi réduire l'intervalle d'étude dans le cas où la fonction admet un centre de symétrie $I(a,b)$ (autre que l'origine) ou un axe de symétrie $x = a$ (autre que $x = 0$)

5. Etude de la fonction dérivée. Limites aux bornes du domaine de définition.

Tableau de variation.

6. Représentation graphique de la fonction.

Remarque

Certaines étapes comme le 2 (ou le 3 ou le 4) peuvent ne pas se produire

2. Etude de la fonction sinus

Soit la fonction $f\ :\ x \mapsto \sin x$

- La fonction sinus est définie sur $D =$
- La fonction sinus est périodique de période $T = 2\pi$

En effet $\forall x \in D,\quad x + 2\pi \in D \quad et \quad \sin(x+2\pi) = \sin x$

Il suffit donc d'étudier la fonction sur $E_1 = [-\pi , \pi]$

- La fonction sinus est impaire

En effet $\forall x \in D,\quad -x \in D \quad et \quad \sin(-x) = -\sin x$

- On réduit l'étude de la fonction à $E_2 = [0 , \pi]$

- La courbe représentative de la fonction sinus admet la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ pour axe de symétrie

En effet $\dfrac{\pi}{2} + x \in D \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} - x \in D$ et $\sin(\dfrac{\pi}{2} + x) = \sin(\dfrac{\pi}{2} - x) \quad \forall x \in D$

On réduit (encore) l'étude de la fonction à $E_3 = \left[0 , \dfrac{\pi}{2}\right]$

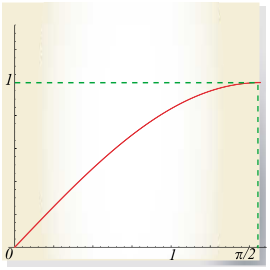
- La fonction sinus est dérivable sur $D =$ et $(\sin x)' = \cos x$ avec $\cos x \geq 0$ pour $x \in E_3 = \left[0 , \dfrac{\pi}{2}\right]$

Tableau de variation :

x	0		$\frac{}{2}$
$f'(x)$	1	$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

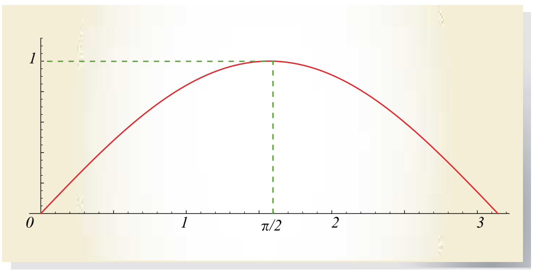
- Courbe représentative :

Pour $x \in E_3 = \left[\ 0\ , \dfrac{\pi}{2}\ \right]$, on obtient l'arc générateur de la courbe représentant les variations de la fonction.



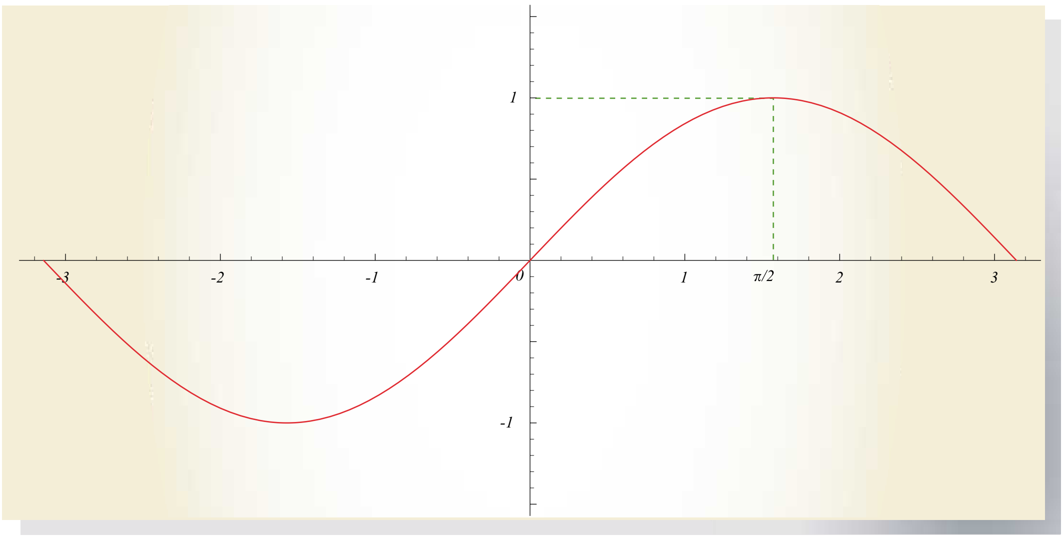
Pour $x \in E_2 = [\ 0\ , \pi\ ]$:

on passe de l'arc générateur obtenu pour $x \in E_3 = \left[\ 0\ , \dfrac{\pi}{2}\ \right]$ à l'arc obtenu pour $x \in E_2 = [\ 0\ , \pi\ ]$ en effectuant la symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$



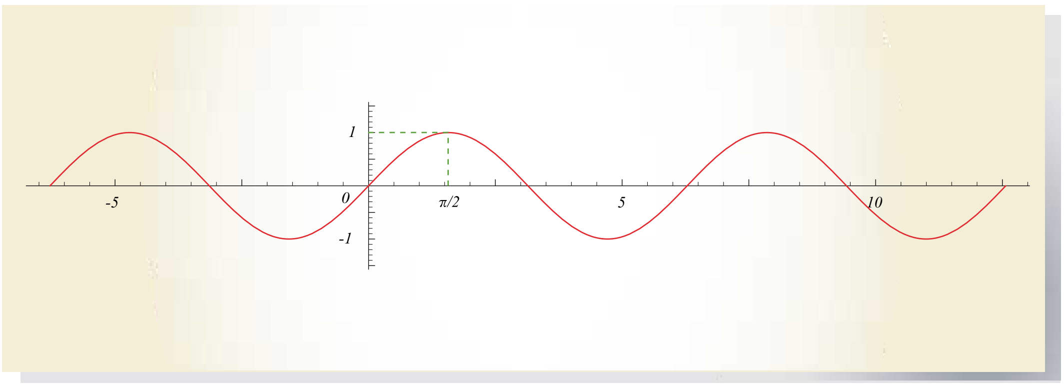
Pour $x \in E_1 = [\ -\pi\ , \pi\ ]$:

on passe de l'arc obtenu pour $x \in E_2 = [\ 0\ , \pi\ ]$ à l'arc obtenu pour $x \in E_1 = [\ -\pi\ , \pi\ ]$ en effectuant la symétrie par rapport à l'origine O du repère



Pour $x \in D = R$:

on passe de l'arc obtenu pour $x \in E_1 = [-\pi, \pi]$ à l'arc obtenu pour $x \in D = R$ en effectuant les translations $2k\pi\vec{i}$, $k \in Z$



3. Etude de la fonction cosinus

Soit la fonction $f : x \mapsto \cos x$

- La fonction cosinus est définie sur $D =$
- La fonction cosinus est périodique de période $T = 2\pi$

En effet $\forall x \in D, \quad x + 2\pi \in D \quad et \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$

Il suffit donc d'étudier la fonction sur $E_1 = [-\pi, \pi]$

- La fonction cosinus est paire

En effet $\forall x \in D, \quad -x \in D \quad et \quad \cos(-x) = \cos x$

On réduit l'étude de la fonction à $E_2 = [\,0\,,\pi\,]$

- La courbe représentative de la fonction cosinus admet le point $I = (\frac{\pi}{2}\,,\,0\,)$ pour centre de symétrie

En effet $\frac{\pi}{2} + x \in D \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x \in D$ et $\cos(\frac{\pi}{2} + x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin x + \sin x = 0 \quad \forall x \in D$

On réduit (encore) l'étude de la fonction à $E_3 = \left[\,0\,,\frac{\pi}{2}\,\right]$

- La fonction cossinus est dérivable sur $D =$ et $(\cos x)' = -\sin x$

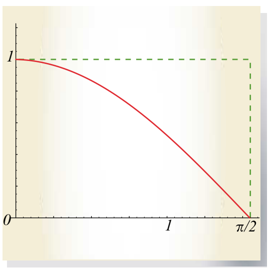
avec $-\sin x \leq 0$ pour $x \in E_3 = \left[\,0\,,\frac{\pi}{2}\,\right]$

- Tableau de variation :

x	0		$\overline{2}$
$f'(x)$	0	$-$	-1
$f(x)$	1	$\searrow$	0

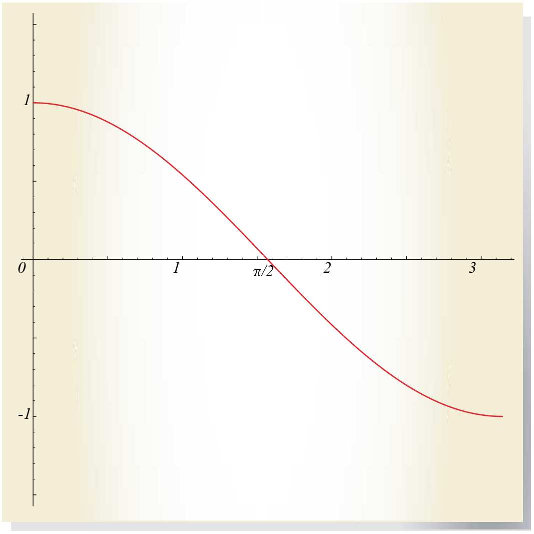
- Courbe représentative :

Pour $x \in E_3 = \left[\,0\,,\frac{\pi}{2}\,\right]$, on obtient l'arc générateur de la courbe représentant les variations de la fonction.



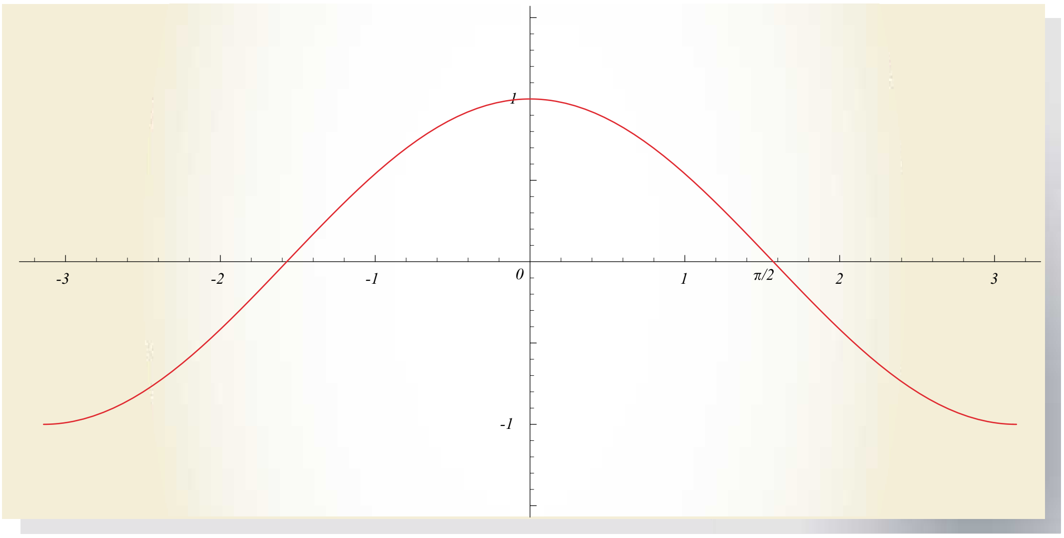
Pour $x \in E_2 = [\,0\,,\pi\,]$:

on passe de l'arc générateur obtenu pour $x \in E_3 = \left[0 , \frac{\pi}{2} \right]$ à l'arc obtenu pour $x \in E_2 = [0 , \pi]$ en effectuant la symétrie par rapport au point $I = (\frac{\pi}{2} , 0)$



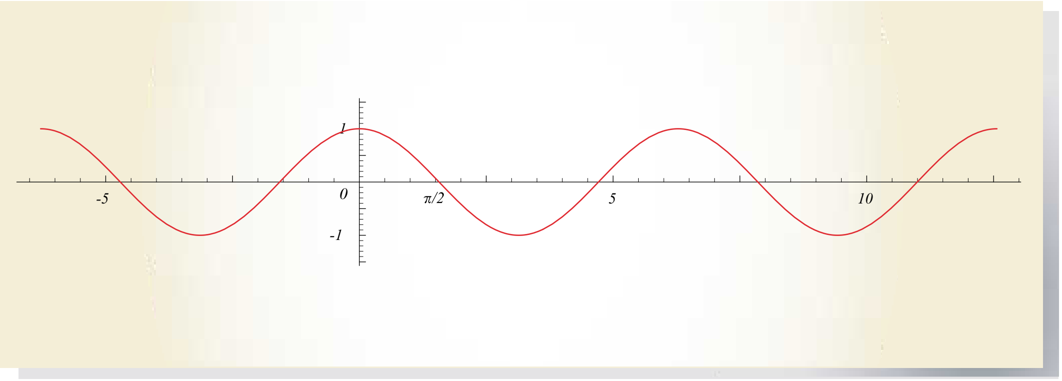
Pour $x \in E_1 = [-\pi , \pi]$:

on passe de l'arc obtenu pour $x \in E_2 = [0 , \pi]$ à l'arc obtenu pour $x \in E_1 = [-\pi , \pi]$ en effectuant la symétrie par rapport à l'axe Oy



Pour $x \in D = R$:

on passe de l'arc obtenu pour $x \in E_1 = [-\pi , \pi]$ à l'arc obtenu pour $x \in D = R$ en effectuant les translations $2 k \pi \vec{i}$, $k \in Z$



4. Etude de la fonction tangente

Soit la fonction $f\ :\ x \mapsto \tan x$

- La fonction tangente est définie par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ sur $D = \bigcup\limits_{k\in Z} \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \middle|\ k \in Z \right\}$

- La fonction tangente est périodique de période $T = \pi$

En effet $\forall x \in D,\quad x + \pi \in D \quad et \quad \tan(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$

Il suffit donc d'étudier la fonction sur $E_1 = \left] -\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2} \right[$

- La fonction tangente est impaire

En effet $\forall x \in D,\quad -x \in D \quad et \quad \tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

On réduit l'étude de la fonction à $E_2 = \left[0\ ,\dfrac{\pi}{2} \right[$

- La fonction tangente est dérivable sur $D = \bigcup\limits_{k\in Z} \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \middle|\ k \in Z \right\}$

et $(\tan x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x} \right)' = \dfrac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

avec $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0$ pour $x \in E_2 = \left[0\ ,\dfrac{\pi}{2} \right[$

- Limite aux bornes du domaine de définition :

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \sin x = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \cos x = \lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \cos(\frac{\pi}{2}) = 0^+$

alors $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty$

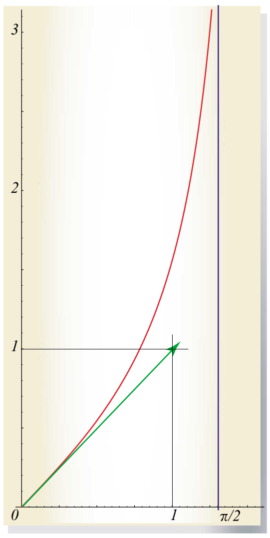
La droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est asymptote à la courbe

- Tableau de variation :

x	0		2
$f'(x)$	1	$+$	‖
$f(x)$	0	↗	$+$ ‖

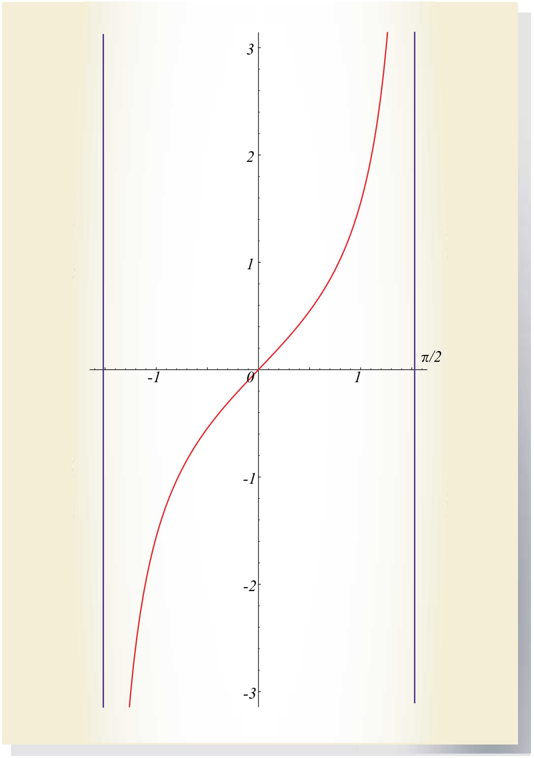
- Courbe représentative :

Pour $x \in E_2 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on obtient l'arc générateur de la courbe représentant les variations de la fonction.



Pour $x \in E_1 = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

on passe de l'arc générateur obtenu pour $x \in E_2 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ à l'arc obtenu pour $x \in E_1 = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ en effectuant la symétrie par rapport au l'origine O du repère.



Pour $x \in D = \bigcup_{k \in Z} \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| \; k \in Z\right\}$:

on passe de l'arc obtenu pour $x \in E_1 = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ à l'arc obtenu pour $D = \bigcup_{k \in Z} \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| \; k \in Z\right\}$

en effectuant les translations